N° D'ORDRE : 21

THESES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR - INGÉNIEUR

PAR

Claude OUDET
Ingénieur ICMB
Assistant à la Faculté des Sciences

PREMIÈRE THESE

Recherches sur la constitution, les perturbations et l'amortissement des diapasons.

Formes particulières propres aux diapasons à lame mince

DEUXIÈME THESE

Proposition donnée par la Faculté

Exposé des connaissances actuelles concernant l'influence des dislocations sur les propriétés mécaniques des métaux

Soutenues le 30 Juin 1964 devant la Commission d'Examen

MM. CHALEAT — Président
MESNAGE, VIENOT — Examinateurs

N° D'ORDRE : 21

THESES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR - INGÉNIEUR

PAR

Claude OUDET
Ingénieur ICMB
Assistant à la Faculté des Sciences

PREMIÈRE THESE

Recherches sur la constitution, les perturbations et l'amortissement des diapasons.

Formes particulières propres aux diapasons à lame mince

DEUXIÈME THESE

Proposition donnée par la Faculté

Exposé des connaissances actuelles concernant l'influence des dislocations sur les propriétés mécaniques des métaux

Soutenues le 30 Juin 1964 devant la Commission d'Examen

MM. CHALEAT — Président
MESNAGE, VIENOT — Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547626_0033

UNIVERSITE DE BESANCON

FACULTE DES SCIENCES

Doyen Honoraire : M. GLANGEAUD

Professeurs Honoraires : MM. BAILLAUD.R, TRILLAT, VINCENSINI, DUFFIEUX.

Maître de conférences Honoraire : M. GRANIER

DOYEN : M. JACQUEMAIN : Chimie Appliquée

ASSESSEUR : M. MESNAGE : Chronométrie

PROFESSEURS :

MM.	TRONCHET	:	Botanique
	CHATELET	:	Mathématiques
	PERROT	:	Chimie Générale
	DREYFUSS	:	Géologie - Minéralogie
	THEOBALD	:	Paléontologie et géologie stratigraphique
	CROISOT	:	Méthodes mathématiques de la Physique
	DELHAYE	:	Astronomie
	QUANTIN	:	Botanique
	CHALEAT	:	Mécanique Appliquée
	RIPPLINGER	:	Physiologie animale
	NAHON	:	Mécanique Générale
	BERNARD	:	Chimie-Physique
	RIGAL	:	Calcul numérique
Mme	ROZIS	:	Physique
	THIEBAUT	:	Géologie - Minéralogie
	VIENOT	:	Physique Générale

PROFESSEURS SANS CHAIRE :

MM.	DEVIN	:	Chimie Générale
	POTIER	:	Physique des Solides
	GOMOT	:	Zoologie
	MOTCHANE	:	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES :

MM.	VALLEE	:	Mathématiques Appliquées
	REAL	:	Zoologie
	GOUARNE	:	Mathématiques
Mle	LEGRAND	:	Botanique
	THEOBALD.J	:	Physique P.C.B - S.P.C.N
	REMOND	:	Chargé d'Enseignement de la Maîtrise de conférences de Chronométrie

CONSEILLER ADMINISTRATIF UNIVERSITAIRE :

M. LAMBERT

RECHERCHES SUR LA CONSTITUTION

LES PERTURBATIONS ET L'AMORTISSEMENT DES DIAPASONS

-:-:-:-

FORMES PARTICULIERES PROPRES AUX DIAPASONS A LAME MINCE

TABLE DES MATIERES

Page

INTRODUCTION . I à IV

CHAPITRE I : LE DIAPASON EN HORLOGERIE - PROBLEMES POSES SOLUTIONS ACTUELLES .

1,1 - Qu'est-ce qu'un diapason ? 1

1,2 - Position actuelle du diapason en chronométrie 1

1,3 - Les causes de dérive des diapasons 3

1,4 - Conclusions 8

CHAPITRE II : MECANIQUE DES DIAPASONS - PROPRIETES ET CONSTRUCTIONS POSSIBLES .

2,1 - Propriétés mécaniques d'un diapason 12

2,2 - Diapason élastiquement parfait 20

CHAPITRE III : ETUDE DES PERTURBATIONS DUES AUX FORCES EXTERIEURES .

3,1 - La fixation des diapasons et les forces de liaison correspondantes 25

3,2 - Perturbations dues au champ de pesanteur 30

3,3 - Perturbations dues aux forces ne dépendant que de la position et de la vitesse 34

3,4 - Perturbations dues aux vibrations imposées au support 35

CHAPITRE IV : L'AMORTISSEMENT DES DIAPASONS

4,1 - Le frottement interne dans le diapason en élinvar 44

4,2 - Les causes extérieures d'amortissement 50

CHAPITRE V : ETUDE D'UN DIAPASON A LAME MINCE

5,1 - Premières recherches 57

5,2 - Forme définitive 58

5,21 - Etude dynamique rigoureuse 60

5,22 - Calcul par la méthode de Rayleigh 68

5,23 - Etude expérimentale 69

CONCLUSIONS 71

I N T R O D U C T I O N

L'origine de ce travail remonte à octobre 1957 : nous travaillions alors dans un laboratoire de recherches privé quand on nous proposa de jeter les bases d'un mouvement électrique pour pendulette extrapolable aux dimensions de la montre . C'était dans l'industrie l'époque d'intenses recherches sur les mouvements à balancier moteur entretenus électriquement . Les difficultés étaient grandes : les petites piles n'avaient pas encore atteint un stade de développement suffisant, les aimants platine-cobalt de bonne qualité étaient introuvables en France, les fils fins difficiles à obtenir et à bobiner etc ... Par ailleurs, le marché de la montre électrique ne semblait pas mûr, et il est vite apparu que la recherche devait se porter immédiatement sur un oscillateur plus évolué que le balancier-spiral, quitte à reculer de plusieurs années l'aboutissement à un produit valable .

Sept ans après, on constate bien que la plupart des chercheurs ont épuisé leur imagination dans les mille-et-une versions du balancier-spiral entretenu électriquement ; or, ce produit a toujours un marché aussi restreint avec bien peu d'avantages par rapport à un mouvement purement mécanique .

Que reproche-t-on au balancier-spiral ? Essentiellement l'impossibilité où l'on semble se trouver d'en obtenir autrement que par la main d'un régleur qualifié un réglage optimal. Certes, la théorie du balancier-spiral et de son échappement est parfaitement établie, mais la multiplicité des paramètres en jeu défiera encore pour quelque temps l'analyse et la correction automatique autre que celle du réglage de raquette ou du "repère" qui ne sont pas à proprement parler du "réglage" au sens noble . L'analyse des corrections à effectuer pour chaque paramètre est certes concevable

et nous sommes persuadés que le problème mérite une étude approfondie . Mais s'avèrera-t-il rentable vu les petites séries produites dans chaque calibre par chaque termineur ?

Il est donc tout naturel de se tourner pour l'avenir vers des oscillateurs dont les qualités dépendent d'un nombre plus réduit de paramètres et pour lesquels le rôle du régleur disparaîtrait tout en obtenant une précision accrue . C'est ainsi que nos recherches se sont orientées dès l'origine vers les petits diapasons . Notre étude était loin d'être terminée lorsque furent connus, en novembre 1960, les travaux de Monsieur HETZEL . On ne peut qu'admirer le chef-d'oeuvre de réalisation obtenu ; pourtant le diapason en U nous semble condamné tôt ou tard , non tant pour sa marche aux positions que pour les défauts propres à tout système d'oscillateurs couplés. Donc , loin de ralentir nos recherches, l'apparition de la montre "Accutron" ne nous a que plus fermement poussés à l'étude systématique des diapasons, indépendamment d'une forme particulière en U.

Nous avons donc poursuivi cette étude au Laboratoire de Mécanique Appliquée de la Faculté des Sciences de Besançon, à partir de janvier 1961 . Le grand nombre d'expériences que nous avions faites, depuis les petits diapasons jusqu'aux essais sur barres de sept mètres nous avait amenés non à la réalisation d'un oscillateur pleinement satisfaisant, mais à l'intuition d'un certain nombre de propriétés fondamentales communes à tous les oscillateurs présentant une surtension élevée . Il a donc été essentiel de mettre au clair ces propriétés, à la fois mécaniques, élastiques et physiques et de proposer pour le diapason une définition plus large englobant tous les oscillateurs mécaniques présentant des propriétés identiques. Nous nous y attachons dans une première partie sans apporter d'éléments vraiment nouveaux, mais en explicitant ce que tout expérimentateur sait ou sent et dont la connaissance n'est pas suffisamment précise pour qu'elle serve d'armature solide à ses constructions . L'aspect probablement le plus positif de cette première partie se dégage de l'utilisation directe des théories de ZENER connues et développées depuis bientôt trente ans par les physiciens et les métallurgistes et qui semblent pourtant tout à fait ignorées des spécialistes de la chronométrie.

Dans une seconde partie, nous étudions en détail une solution particulière de diapason de flexion satisfaisant au "cahier des charges" que nous avons dressé dans la première partie .

Nous avons volontairement soustrait de ce texte pour ne pas l'alourdir la description de la plupart des expériences : les méthodes utilisées ne présentent en effet aucune originalité propre . Le but de l'expérience est de tirer des lois ; notre but est atteint si les lois dégagées permettent de construire un bon diapason .

Selon la proposition faite dans une note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (séance du 25 mai 1964), nous entendons sous le mot "diapason" une famille d'oscillateurs mécaniques composés de plusieurs oscillateurs élémentaires, de telle sorte que la quantité de mouvement et le moment cinétique de l'ensemble soient nuls . Suivant le type de contrainte mis en oeuvre, nous parlons de diapason de flexion, d'extension, de torsion, à distribution radiale etc ...

Je suis très heureux d'exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur CHALEAT, directeur du Laboratoire de Mécanique Appliquée pour les conseils qu'il m'a donnés et les notes personnelles qu'il m'a obligeamment communiquées . J'adresse également l'expression de ma vive reconnaissance à Monsieur le Professeur MESNAGE, directeur de l'Ecole Nationale Supérieure de Chronométrie et de Micromécanique qui m'a permis de mettre à contribution le personnel et le matériel de cet établissement ; mes remerciements vont en particulier aux mécaniciens : MM. POINTURIER, MAITRE, PETITJEAN et au personnel du C.N.R.S. : Monsieur ROY et Mademoiselle BERTRAND qui a eu la peine de revoir ce texte et d'en assurer l'impression .

Je tiens aussi à remercier Monsieur RIGAL et le personnel du Laboratoire de Calcul Numérique qui s'est chargé des calculs .

J'exprime également ma reconnaissance à Monsieur BERCOT, directeur des Etablissements PARRENIN, promoteur de cette étude, qui a mis ses moyens à ma disposition, en particulier son atelier de mécanique dirigé par Monsieur BINETRUY.

Enfin, je remercie mon collègue LALLEMENT dont les recherches sur les diapasons de torsion viennent confirmer mes propositions et certains résultats expérimentaux, et à qui l'on doit l'invention de l'excitateur absolu, élément remarquablement utile dans les recherches sur les oscillateurs.

PREMIERE PARTIE

-:-:-:-

RECHERCHES SUR LA CONSTITUTION

LES PERTURBATIONS ET L'AMORTISSEMENT DES DIAPASONS

CHAPITRE I

LE DIAPASON EN HORLOGERIE

PROBLEMES POSES - SOLUTIONS ACTUELLES

1,1 - Qu'est-ce qu'un diapason ?

Selon ROBERT dans son "dictionnaire de la langue française", le diapason est "un petit instrument en forme de fourche qui donne le la" . Etymologiquement, rien ne précise cette forme de fourche : le mot grec signifie littéralement "par toutes" (les cordes de l'octave) . Tous les sens du mot le rattachent à l'acoustique . L'instrument, inventé en 1711, a été utilisé pendant plus de deux siècles, et il l'est encore de nos jours, pour accorder les instruments de musique . En effet, après excitation par choc, l'accordeur a bien le temps d'entendre les battements entre la fréquence étalon du diapason et celle à ajuster : il est à noter que pour cette opération le diapason est tenu à la main. Une bonne surtension, qualité fondamentale d'un oscillateur, a donc été reconnue depuis longtemps au diapason ; de tout temps également a été connue sa propriété de rayonner davantage lorsqu'il est posé sur un objet en bois, sa faculté de "garder le son" étant alors réduite .

Connaissait-on d'autres instruments doués de la même propriété ? Il ne le semble pas : il fallait en effet un instrument portatif, de petites dimensions, qui rayonne tout de même de façon audible, même tenu à la main. A l'heure actuelle, aucun des diapasons ayant une forme autre que celle du U ne satisfait encore l'accordeur .

Le chronométrier s'est emparé très vite de l'instrument, mais il n'a connu son âge d'or que lorsqu'on a su entretenir électriquement ses vibrations . L'histoire du développement du diapason en chronométrie ayant été fréquemment exposée par divers auteurs [1] [2] [3] , nous ne reviendrons pas sur le sujet .

1,2 - Position actuelle du diapason en chronométrie .

1,21 - Depuis l'époque où il était seul utilisable comme étalon portatif à fréquence acoustique et jusqu'à l'apparition de la montre "Accutron", le diapason n'avait cessé de voir se réduire ses applications au bénéfice du

quartz. Son utilisation au laboratoire de chronométrie a pratiquement disparu et trois ou quatre réalisations industrielles, fort soignées d'ailleurs, couvrent facilement l'ensemble du marché extra-horloger. Les surtensions couramment annoncées sont de l'ordre de 15000, avec une stabilité de quelques unités 10^{-6} par an, ce qui semble très optimiste. Toutefois, à court terme et à poste fixe, ce résultat est obtenu sans précaution spéciale de régulation de température [4] [5] . Avec de grandes précautions, on a pu obtenir une stabilité de l'ordre de 1.10^{-7}.

1,22 - Quels peuvent être encore les avantages du diapason sur le quartz ? Il en est plusieurs bien établis :

- l'absence d'organes démultiplicateurs rend l'oscillateur plus sûr pour fournir une fréquence acoustique stabilisée :

- sa consommation est faible par rapport à l'équivalent à quartz d'égale énergie.

- son coefficient de température est faible dans un très large domaine de température, et cela sans enveloppe thermostatée. Pour atteindre la même précision aux températures extrêmes, il faut dépenser avec un quartz une énergie qui n'a plus aucun rapport avec la puissance de sortie. Nous exceptions bien entendu la coupe G T, très coûteuse et réservée au laboratoire.

- son prix est modique.

- son encombrement est encore inférieur à l'équivalent à quartz devant fonctionner dans une enceinte régulée, mais il est probable que cette situation tournera prochainement au désavantage du diapason. Cependant, le diapason lui-même doit progresser dans le domaine de la miniaturisation.

1,23 - Le défaut de la plupart des réalisations actuelles réside dans leur sensibilité aux forces parasites et particulièrement aux vibrations. Ainsi, à quoi bon annoncer une stabilité de 10^{-6} lorsque le seul champ de pesanteur provoque suivant la position du diapason des variations supérieures à 10^{-5}... A cette occasion, remarquons que les caractéristiques demandées dépassent souvent de très loin celles qui sont strictement nécessaires et que la précision courante du diapason, de l'ordre de 10^{-5}, suffit pour de nombreuses applications industrielles ou militaires. Signalons tout de même que certains

diapasons en H, avec montage judicieux des éléments capteurs et excitateurs, fonctionnent de façon satisfaisante sous des accélérations de 15 g dans la gamme 5 - 2000 Hz [6] .

Un autre défaut du diapason nous préoccupera beaucoup: Il s'agit de la diminution de la surtension avec l'encombrement et la fréquence . Nous avons obtenu par exemple une surtension de 500 000 avec une barre fonctionnant en diapason d'extension, et ce dans un volume de quelques dm^3 . Les réalisations industrielles ont une surtension voisine de 20 000 pour un volume de quelques dizaines de cm^3. Enfin, les petits diapasons de 1/10 de cm^3 voient leur surtension abaissée encore d'une puissance de 10. Très grossièrement, et espérons-le provisoirement, nous pouvons dire que la surtension est divisée par 10 lorsque le volume est divisé par 100 .

1,3 - Les causes actuelles de dérive du diapason .

Il faut distinguer les dérives à court et à long terme; mais précisons tout de suite que les exigences de l'industrie horlogère ne portent que sur cette dernière . Il est bien connu que la précision instantanée d'une montre ne dépasse guère 10^{-3} alors que sa précision moyenne est au moins dix fois plus grande. Un diapason doit permettre d'atteindre une stabilité de marche de quelques unités 10^{-5} par an,ce qui est supérieur aux besoins .

1,31 - Seul d'abord, dans le vide et indépendamment de son circuit d'entretien ou d'utilisation, le diapason voit sa fréquence dériver lentement avec le temps . Il s'agit du vieillissement naturel du matériau provoquant une variation du module d'élasticité et des modifications géométriques [13] [16] . Ce phénomène est également connu dans le cas du quartz ; la dérive est de l'ordre de 10^{-5} à 10^{-6} par an . On connaît des moyens de réduire ou d'accélérer le vieillissement, et il est probable que les progrès spectaculaires de l'élaboration des métaux nous conduiront à des valeurs guère éloignées de celles des quartz . Nous incluons dans cette dérive celle provenant plus particulièrement de la modification des couches superficielles .

1,32 - Les variations de fréquence avec la température, comme nous l'avons déjà dit, ne sont pas le point faible du diapason (fig. I, 1) . Elles peuvent être réduites à 10^{-7} par degré, et certains constructeurs annoncent

couramment des variations totales inférieures à 10^{-5} pour un écart de 50°. Ce résultat est obtenu par l'emploi d'alliages à coefficient thermoélastique nul, comme l'élinvar ou le NI-SPAN-C, ou par une structure bimétallique . Notons que les spécialistes savent ajuster le coefficient thermoélastique par des traitements thermiques . Bien que la stabilité de ce coefficient ne soit pas parfaite, nous considérerons donc que le diapason ne présente auncun problème de ce côté, pour les applications qui nous intéressent du moins.

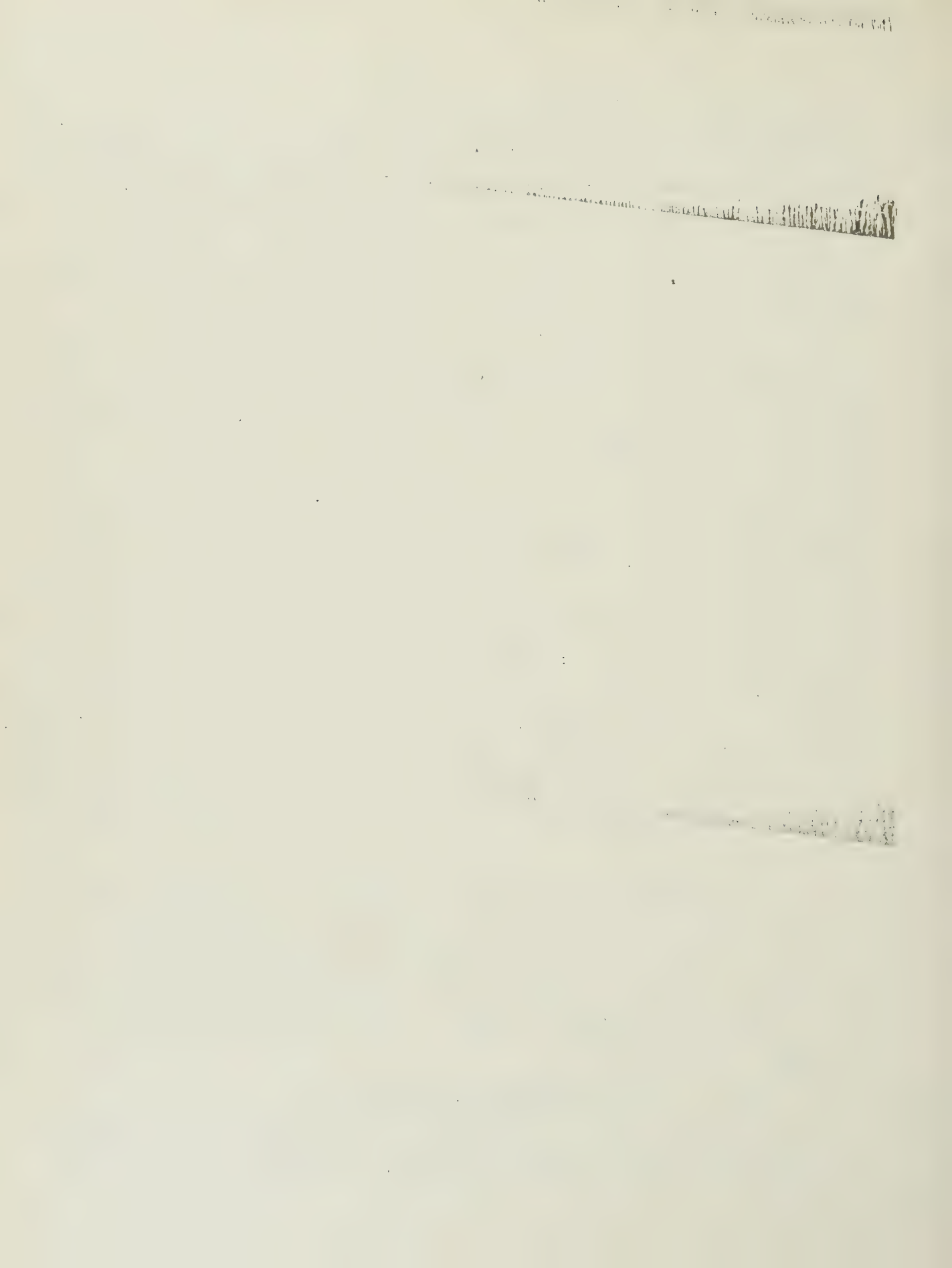
1,33 - La dérive dûe aux variations de la densité du fluide entraîné reste un facteur très secondaire, étant donné qu'il s'agit d'une stabilité à court terme et qu'il est aisé d'opérer sous vide . Nous ne nous occuperons donc pas non plus de ce paramètre .

1,34 - Enfin, comme tous les oscillateurs, le diapason présente un défaut d'isochronisme intrinsèque, et il s'agit toujours là d'un problème extrêmement complexe. Certes, ce défaut est au moins dix fois plus faible que pour le système balancier-spiral sans courbes terminales, mais cette fois il se prête très mal au calcul . Seule la lame vibrante présente un défaut d'isochronisme calculable : nous renvoyons pour cela aux travaux de monsieur CHALEAT . Il est probable en tout cas que ce soit le diapason de torsion qui présente le plus faible défaut, fait déjà connu pour les oscillateurs simples . Ce défaut d'isochronisme est susceptible d'entraîner une dérive lente du même ordre de grandeur que celle dûe au vieillissement. En effet, dans le cas général du fonctionnement sur pile, il est bien difficile d'éviter des variations d'amplitude .

Nous rangerons également dans ce paragraphe les variations de marches dues aux modifications des couplages . En effet, de nombreux diapasons, du fait même qu'ils nécessitent un couplage pour fonctionner, constituent des systèmes non linéaires . C'est le cas des diapasons en U et en H par exemple, où le couplage des branches se modifie en fonction de paramètres tels que la position ou les vibrations .

1,35 - Influence du circuit d'entretien .

Ce facteur mérite une étude détaillée; en effet, on sait l'importance du défaut qu'il cause au balancier-spiral : le diapason y serait-il moins



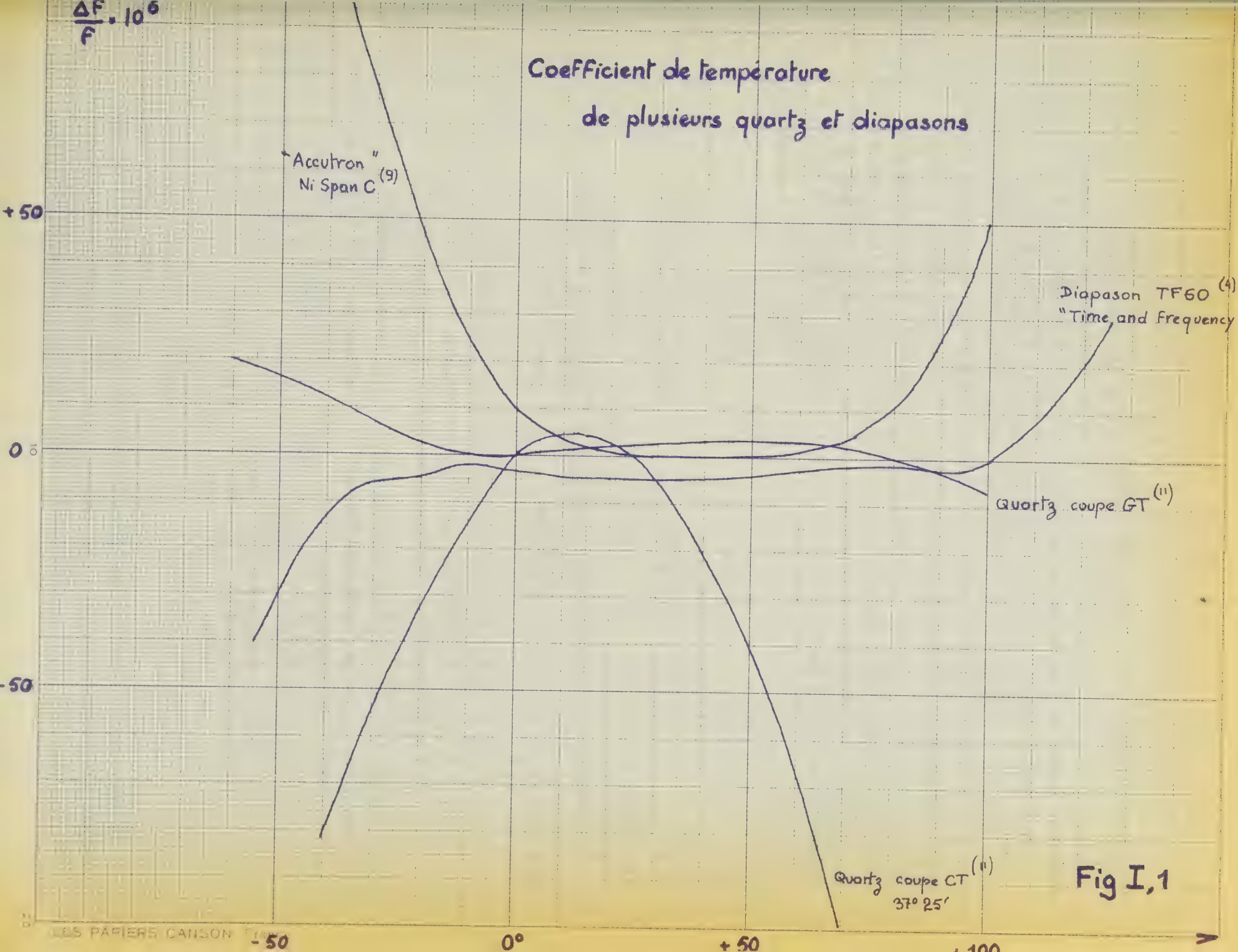


Fig I, 1

LES PAPIERS CANSON

exposé ? Nous allons voir qu'il n'en est rien . Une étude complète du bilan d'énergie est nécessaire .

En horlogerie électrique de petit et moyen volume, la source d'énergie est presque toujours une pile : on dispose donc d'une énergie limitée de W_t ergs par seconde , compte tenu du rendement d'utilisation de la pile * . Nous considérerons dans toute la suite de cette étude que l'énergie W_u nécessaire par seconde à l'organe d'utilisation est fournie par l'intermédiaire d'un amplificateur, donc que le seul travail W_c demandé à l'oscillateur est utilisé à la commande de l'amplificateur . Le signe Δ indiquera qu'il s'agit d'un travail par période . Soit W l'énergie de l'oscillateur et ΔW_1 la perte d'énergie en amortissement libre . Nous rappelons les expressions classiques :

$$\frac{\Delta W_1}{W} = 2\delta = 2\pi Q^{-1} \qquad (1)$$

$$W = \frac{1}{2} A \theta_0^2 \omega^2 \qquad (2)$$

$$\Delta W_1 = \pi A Q^{-1} \theta_0^2 \omega^2 \qquad (3)$$

$$W_1 = W \omega Q^{-1} \qquad (4)$$

Nous définirons le coefficient de surtension pratique de l'oscillateur

$$Q_p = \frac{2\pi W}{\Delta W_1 + \Delta W_c} \qquad (5)$$

Soit : ρ_c le rendement de l'organe de commande de l'amplificateur
G le gain en puissance de cet amplificateur
ρ_u le rendement de l'organe fournissant l'énergie utile W_u

L'énergie disponible à la sortie de l'amplificateur est $\rho_c . \Delta W_c . G$. Une partie de cette énergie doit fournir le travail utile, le reste devant compenser les pertes $\Delta W_1 + \Delta W_c$ de l'oscillateur, par l'intermédiaire d'un circuit de rendement ρ_e . Le bilan d'énergie s'écrit donc :

$$G . \rho_c . \Delta W_c - \frac{\Delta W_u}{\rho_u} - \frac{(\Delta W_1 + \Delta W_c)}{\rho_e} = 0$$

soit en utilisant la formule (1).

---

* Cette question est souvent fort négligée en horlogerie électrique où les piles débitent par impulsions, alors que leur résistance n'est pas toujours négligeable devant celle du circuit d'utilisation .

$$\rho_u \cdot \Delta W_c \, (G \cdot \rho_c \cdot \rho_e - 1) = \Delta W_u \cdot \rho_e + 2\pi Q^{-1} \cdot W \cdot \rho_u \qquad (6)$$

Pour assurer un bon rendement à l'amplificateur, on le fait fonctionner en interrupteur : comme la tension de commande est généralement proportionnelle à la vitesse de l'oscillateur, cela suppose que l'amplificateur ne fonctionne que pendant un court instant au passage par la position d'équilibre . Nous considérerons donc en première approximation que les couples résistant C_r et moteur C_m sont constants pendant cet instant, défini par ses phases initiale et finale φ_1 et φ_2 . Malheureusement, aucun amplificateur n'est parfait, et le couple moteur est déphasé d'un angle ε par rapport au couple résistant . La perturbation de marche qui en résulte peut être calculée par la formule d'Airy [7] :

$$M = \frac{43\,200\,T^2}{A\,\pi^3\,\theta_0} \int_0^{2\pi} C \cos\varphi \, d\varphi = \frac{86\,400}{\pi W} \int_0^{2\pi} C\,\theta_0 \cos\varphi \, d\varphi \qquad (7)$$

Supposons l'amplitude constante : l'intégration est immédiate :

$$M = \frac{86\,400}{\pi W} \left\{ - C_r\,\theta_0 (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) + C_m\,\theta_0 \left[\sin(\varphi_2 + \varepsilon) - \sin(\varphi_1 + \varepsilon) \right] \right\}$$

soit, le déphasage ε étant petit :

$$M = \frac{86\,400}{\pi W} \left\{ - C_r\,\theta_0 (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) + C_m\,\theta_0 \left[\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 + \varepsilon (\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \right.\right.$$

Les travaux moteur et résistant peuvent s'écrire :

$$W_r = C_r (\theta_2 - \theta_1) \qquad W_m = C_m (\theta_2 - \theta_1)$$

Or : $\theta_1 = \theta_0 \cos\varphi_1$, $\theta_2 = \theta_0 \cos\varphi_2$

d'où :

$$W_r = C_r\,\theta_0 (\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1) \quad , \quad W_m = C_m\,\theta_0 (\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)$$

La perturbation de marche prend alors la forme :

$$M = \frac{86\,400}{\pi W} \left[(W_m - W_r) \frac{\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)}{\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1} + W_m \cdot \varepsilon \right]$$

Le travail résistant est ΔW_c et le travail moteur $\Delta W_1 + \Delta W_c$

$$M = 86\,400 \left[\frac{\Delta W_1}{\pi W} \cdot \frac{(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)}{(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)} + \frac{\Delta W_1}{\pi W} \varepsilon + \frac{\Delta W_c}{\pi W} \varepsilon \right]$$

soit finalement, en fonction de la surtension :

$$M = 172\,800 \left[\frac{(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)}{(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)} Q^{-1} + \varepsilon Q_p^{-1} \right] \qquad (8)$$

Il serait très imprudent de prétendre que le premier terme est nul. En effet, dans le cas d'organes électrodynamiques par exemple, il suffit d'un champ magnétique non parfaitement homogène pour qu'il prenne une valeur finie ,(c'est-à-dire non infiniment petite). D'autre part, ce terme est une fonction $F(\theta_0)$. Il apparaît donc d'une importance capitale d'augmenter la surtension Q et la surtension pratique Q_p . La fréquence n'apparaît pas dans cette formule .

On peut préciser l'expression (8) en utilisant la formule (6) . Dans cette dernière, 1 est négligeable devant $G.\rho_c.\rho_e$, car G est de l'ordre de plusieurs centaines; d'où :

$$M = 172\,800 \left[\frac{(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)}{(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)} Q^{-1} + \varepsilon Q^{-1} + \varepsilon \frac{\Delta W_u}{2\pi W G \rho_c \rho_u} + \varepsilon \frac{1}{G \rho_c \rho_e} Q^{-1} \right] \qquad (9)$$

Le dernier terme est également négligeable devant les autres comme étant du 3ème ordre .

Dans la plupart des applications horlogères courantes, le terme qui contient ΔW_u, énergie essentiellement variable avec le temps, l'usure ... est petit vis-àvis des deux premiers .

De même, φ_2 est voisin de $\pi - \varphi_1$. En effet, pour un système rigoureusement symétrique par rapport à la position d'équilibre, $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$. D'autre part, φ_1 est de l'ordre de $\pi/4$. Le premier terme de la formule (9) devient alors sensiblement égal à : $\frac{\varepsilon'}{2}$ où $\varepsilon' = \pi - \varphi_1 - \varphi_2$ représente un défaut de symétrie .

L'expresssion de la marche se réduit à :

$$M = 86\,400 \left(\varepsilon' Q^{-1} + 2 \varepsilon Q^{-1} \right) \qquad (10)$$

Le problème des couples perturbateurs appliqués au diapason apparaît donc essentiellement comme un problème de surtension, qui peut être rendu plus aigu par les difficultés de réaliser un circuit d'entretien parfait .

L'étude du mémoire de M. ABELE [15] est indispensable pour approfondir cette question .

1,36 - Nous pourrions encore ajouter aux causes de dérive des diapasons les champs magnétiques accidentels . En effet l'Elinvar généralement utilisé en France n'est pas amagnétique . Les blindages étant coûteux et souvent encombrants, il y a là un problème métallurgique qui sort de l'objet du présent travail .

1,4 - CONCLUSIONS .

Le programme d'étude se dégage de lui-même de ce tour d'horizon :
- recherche de l'insensibilité aux champs de force parasites, particulièrement pesanteur et vibrations ;
- recherche d'une grande surtension dans les petits volumes .

Le premier problème relève avant tout de la mécanique du diapason, il est mathématique et facile à étudier ; le second relève de la physique pure mais il faut bien se convaincre de ce que "l'expérimentation non guidée par la théorie est rarement payante".

Si l'on n'arrive pas à atteindre une surtension élevée, de 10^4 pour fixer les idées,* il faudra porter une attention particulière à la technologie des circuits d'entretien ; d'ailleurs, que l'on se souvienne des efforts énormes qui ont été faits sur ce problème dans le cas des quartz . C'est la raison pour laquelle nous ne pensons pas que l'utilisation mécanique directe d'un diapason soit d'un grand avenir, particulièrement pour le

---

* Nous cherchons naturellement dans cette étude à pousser la précision du diapason à l'extrême, mais il est bien évident que par rapport à un balancier spiral dont la surtension est non seulement faible, mais fonction de l'amplitude et du temps [12] , un oscillateur de surtension modeste mais stable peut fort bien réaliser un progrès considérable . (surtension de 10^3 par ex.)

principal consommateur éventuel qu'est l'industrie horlogère de gros volume. Des oscillateurs suffisamment petits pourraient être entretenus avec un circuit beaucoup plus parfait pour la seule raison que l'on n'aurait pas à se préoccuper de rendement . Ce problème serait rejeté sur le moteur, alimenté sans inconvénient par des signaux carrés : les résultats déjà acquis sur prototype montrent des rendements globaux en régime synchrone très proches de ceux obtenus dans la montre Accutron; or ces travaux n'ont débuté qu'en 1962 . Enfin, la mise sous vide d'un petit diapason ne pose aucun problème, pas même de prix de revient .

-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] - B. DECAUX : "L'utilisation des diapasons dans la mesure du temps" (Annales françaises de Chronométrie, 1961, 4ème Tr.). Cet auteur fait en particulier état des difficultés que lui ont données les circuits d'entretien pour obtenir une haute stabilité .

[2] - A. BERTRAND : "A propos des moteurs chronométriques à diapason" (ibid.)

[3] - M. LAVET : "Propriété des organes électromagnétiques convenant aux petits moteurs chronométriques à diapasons" (ibidem)

[4] - Documentation "Time and Frequency"

[5] - Documentation de la société "BRONZAVIA"

[6] - W.J. HOTT : "Tuning fork for High-Q-Resonance" (Gyrex Corporation). (Electronics, 20 mai 1960)

[7] - R. CHALEAT : Cours de Chronométrie professé à la Faculté des Sciences et à l'Ecole Nationale Supérieure de Chronométrie et de Micromécanique de Besançon : Théorie élémentaire des perturbations des mouvements oscillatoires .

[8] - P. LANGUE : Note CETEHOR n° 2360 du 1er mai 1962 . "Essais effectués sur la montre Acoutron". Cette note contient un tableau de comparaison de plusieurs oscillateurs particulièrement instructif.
P. LANGUE : Note CETEHOR n° 2312 du 5 décembre 1962. "Montre électrique : Examen des diverses possibilités de constitution de ses organes".

[9] - M. HETZEL : "Le diapason et son influence sur l'horlogerie". Cet auteur expose une conception différente de la nôtre : la perturbation est à son avis fonction du produit $W\omega$. (Bulletin de la Société Suisse de Chronométrie, Vol IV, 1962)

[10] - J.P. BUCHANAN : "Handbook of piezoelectric crystals" (pp 41 et 44)

[11] - Y. ROCARD : "Dynamique générale des vibrations" . (Masson et Cie 1949 ch. XVII, parg. 155 à 158).

[12] - C. ATTINGER : "Amortissement et Facteur de qualité du système balancier-spiral" (Bulletin de la Société Suisse de Chronométrie, Vol IV ,1962 p. 751)

[13] - E. JOSSO : "Propriétés des alliages Fer-Nickel à haute teneur en nickel" (Centre d'information du Nickel) p.8 et suivantes.

[14] - Documentation sur le NI-SPAN-C (Gilby Fodor)

[15] - M. ABELE : "Etude d'un système oscillant entretenu à amplitude autostabilisée et application à l'entretien d'un pendule élastique" (Annales françaises de Chronométrie, n° 3 et 4, 1942)

[16] - A. KAROLUS : "La constance des générateurs à diapasons" (Annales françaises de Chronométrie, 3ème Tr. 1953, p 181) . Etude la plus précise sur ce sujet, avec l'article du même auteur cité au chapitre suivant .

-:-:-:-:-:-

NOTATIONS RELATIVES AU CHAPITRE I

ω pulsation de l'oscillateur

f fréquence "

T période "

A constante d'inertie

k " de raideur

} telles que $\omega = \sqrt{\frac{k}{A}}$

θ_o amplitude maximale

δ amortissement

Q coefficient de surtension

W énergie de l'oscillateur

W_l perte d'énergie de l'oscillateur en amortissement libre

W_c perte d'énergie due à la commande de l'amplificateur

Q_p surtension pratique $= \frac{2\,W}{\Delta W_l + \Delta W_c}$

G gain de l'amplificateur

W_u énergie nécessaire à l'organe d'utilisation

ρ_c rendement du circuit de commande de l'amplificateur

ρ_e rendement du circuit d'entretien

ρ_u rendement de l'organe d'utilisation fournissant l'énergie W_u

M marche de l'oscillateur en secondes par jour

φ phase telle que $\cos \varphi = \frac{\theta}{\theta_o}$

φ_1 phase de début de fonctionnement en interrupteur de l'amplificateur

φ_2 phase de fin " " "

ε déphasage entre les couples résistant et moteur $= \omega . t_c$

-:-:-:-:-:-

CHAPITRE II

MECANIQUE DU DIAPASON - PROPRIETES ET CONSTITUTIONS POSSIBLES

2,1 - Propriété mécanique d'un diapason .

2,10 - Considérons un corps indéformable (S) de centre de gravité G_1, de masse M_1, animé d'un mouvement sinusoïdal par rapport à un trièdre Oxyz lié à un support fixe (fig II, 1) . Ce corps est relié au support en O par l'intermédiaire d'un ressort encastré de masse négligeable . Nous raisonnons donc sur un système "à constantes localisées" . Soit s la trajectoire plane de G_1 située dans le plan Oxy .

A situé sur Ox, la position d'équilibre de G_1
I_1 le moment d'inertie de (S) par rapport à un axe Gz parallèle à Oz
$\vec{V}_1$ le vecteur vitesse de G_1
$\vec{\Omega}_1$ la vitesse angulaire de (S) autour de Gz
$\vec{R}$ la réaction d'encastrement en O
$\vec{\Gamma}$ le couple de réaction en O

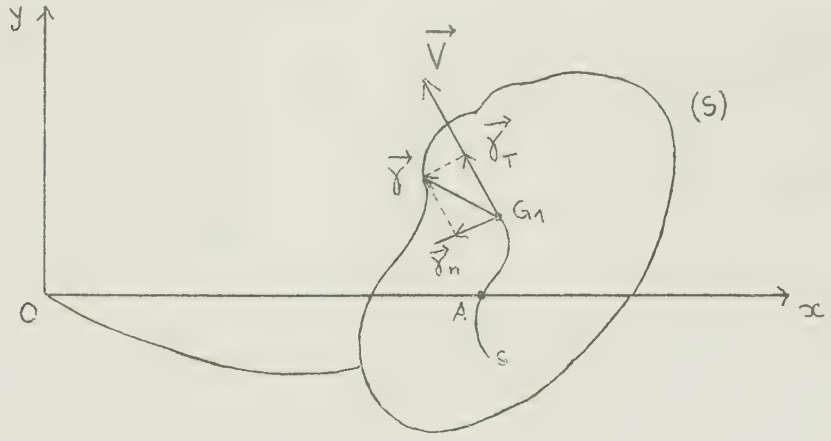


Fig II - 1

Les théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique par rapport au support nous donnent :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(M_1 \vec{V}_1\right) = \vec{R} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\vec{OG}_1 \wedge M_1 \vec{V}_1 + I_1 \vec{\Omega}_1\right) = \vec{\Gamma} \end{cases}$$

Si $\vec{R}$ et $\vec{\Gamma}$ ne sont pas nuls, l'oscillateur entraîne le support, à moins que sa masse ne soit infiniment grande et qu'il soit indéformable . Etant donné que ce n'est jamais le cas, le support perturbe le mouvement de l'oscillateur . Or un support n'a pas des caractéristiques immuables , sauf pour certains pendules fixés sur des piliers de béton, encore que ce matériau soit souvent loin d'être d'une stabilité parfaite . Pour tous les oscillateurs transportables, il y a évidemment intérêt à annuler $\vec{R}$ et $\vec{\Gamma}$. Examinons quelles sont alors leurs possibilités de constitution.

Une première solution constituée par $M_1\vec{V_1}$ constant correspond à un mouvement rectiligne et uniforme. De même $I_1\vec{\Omega_1}$ constant correspond à une rotation uniforme . Ces mouvements sont incompatibles avec la liaison en O au support, et le mouvement sinusoïdal prévu.

La seule intégrale première intéressante est la solution particulière $M_1\vec{V_1} = 0$ et $I_1\vec{\Omega_1} = 0$. Or, cette solution est également incompatible avec l'oscillateur à constantes localisées considéré puisqu'elle impose l'immobilité du centre de gravité de (S). Pour résoudre le problème, on lie à l'oscillateur plusieurs autres masses animées de vitesses différentes .

2,11 - Solution comportant deux oscillateurs : diapason .

2,111 - Considérons une deuxième masse M_2 liée également au support en O par l'intermédiaire d'un autre ressort encastré . Soit $\vec{V_2}$ la vitesse du centre de gravité G_2 de cette masse . On cherche les solutions telles que :

$$\begin{cases} M_1\vec{V_1} + M_2\vec{V_2} = 0 \\ \overrightarrow{OG_1} \wedge M_1\vec{V_1} + I_1\vec{\Omega_1} + \overrightarrow{OG_2} \wedge M_2\vec{V_2} + I_2\vec{\Omega_2} = 0 \end{cases}$$

Le plus souvent on prend $M_1 = M_2$ et $I_1 = I_2$, donc la première équation nous donne :

$$\boxed{\vec{V_1} = -\vec{V_2}}$$

La deuxième équation s'écrit alors :

$$M_1\vec{V_1} \wedge \overrightarrow{G_1G_2} + I_1(\vec{\Omega_1} + \vec{\Omega_2}) = 0$$

Or, $\overrightarrow{V_1}$ est porté par G_1G_2, donc le produit vectoriel est nul, et :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_1} = -\overrightarrow{\Omega_2}}$$

Plus généralement :

$$\sum M \overrightarrow{V} = 0$$
$$\sum I \overrightarrow{\Omega} = 0$$

On constitue alors ce que l'on appelle un diapason . Nous pouvons donc énoncer sa propriété fondamentale :

> Pour qu'un diapason soit "mécaniquement parfait", donc constitue un oscillateur ne présentant aucune autre action sur son support que son propre poids, il faut que sa quantité de mouvement et son moment cinétique totals soient nuls à chaque instant . Son centre d'inertie est alors immobile .

Il en est absolument de même pour les oscillateurs à constantes réparties .

Notons que dans la recherche des formes à donner aux diapasons, on peut le plus souvent conduire les calculs jusqu'au bout en igonrant la position exacte du centre de gravité de chaque oscillateur .

2,112 - Recherche des trajectoires :

Soit un diapason constitué de deux masses identiques : avec les mêmes notations que précédemment, nous avons :

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} = 0 \\ M \left(\dfrac{\overrightarrow{dV_1}}{dt} + \dfrac{\overrightarrow{dV_2}}{dt} \right) = 0 \end{cases}$$

Soient $\overrightarrow{\gamma_1}$ et $\overrightarrow{\gamma_2}$ les vecteurs accélération : ils se composent d'une accélération normale et d'une accélération tangentielle . Si aucune de ces composantes n'était nulle, il faudrait nécessairement que G_1 et G_2 soient confondus, donc que les trajectoires soient symétriques par rapport au point

commun . Or, G_1 et G_2 devraient être confondus à chaque instant , donc les trajectoires doivent être portées par une même droite, et les composantes normales sont nulles . D'où la première proposition de la thèse que nous soutenons :

> Un diapason constitué de deux oscillateurs identiques opposés ne peut être parfait que si leurs centres de gravité respectifs se déplacent sur une même droite ou restent immobiles .

Le système admet un plan de symétrie perpendiculaire à G_1G_2 en son milieu . Ce raisonnement est encore valable pour les diapasons à constantes réparties .

2,113 - Dans ce type fondamental de diapason et pour les systèmes à constantes localisées, on connaît les formes en W (fig II, 2) qui, à notre connaissance, n'ont jamais été developpées ; elles demandent évidemment un calcul rigoureux des proportions en faisant intervenir la masse répartie du ressort . Le diapason de flexion qui sera étudié au chapitre V est également de ce type (fig II, 3) . Le diapason de torsion de la figure II, 4 est probablement le plus parfait du genre : il fait l'objet de recherches soutenues de la part de M. LALLEMENT au Laboratoire de Mécanique Appliquée .

Pour les systèmes à constantes réparties, on connaît les diapasons d'extension constitués par des barres en vibrations longitudinales vibrant généralement avec plan nodal en leur milieu et extrémités libres (fig. II,5). Ce type d'oscillateur a été envisagé pour des applications chronométriques dès 1930 [1] [2] : nous verrons ses inconvénients au chapitre suivant . De telles barres peuvent également vibrer en diapason de torsion (fig II,6) et en diapason de flexion (fig II,7) avec extrémités libres [5] . Ces trois types de vibrations pour une même barre sont utilisés par de nombreux chercheurs dans des études sur le frottement interne, études qui nécessitent des diapasons et l'exploration d'une large bande de fréquences . Nous ne citerons que les deux remarquables appareils de SEEMAN et SIOL [6] et de ZEMANEK et RUDNICK [7] .

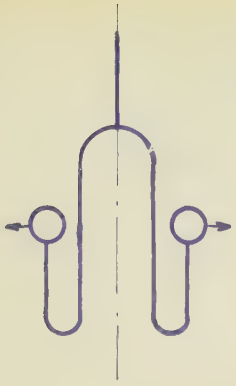


Fig:II,2 Diapason en W

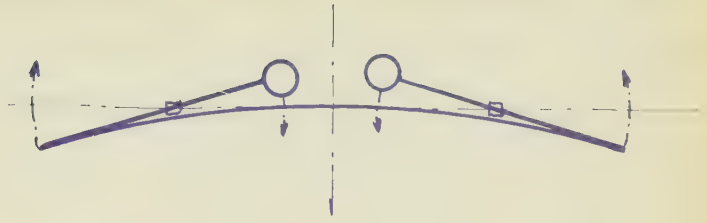


Fig:II,3 Diapason de flexion étudié au chapitre V

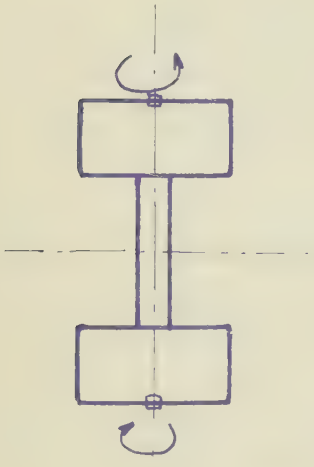


Fig:II,4 Diapson de torsion

Fig:II,5 Barre en vibrations longitudinales

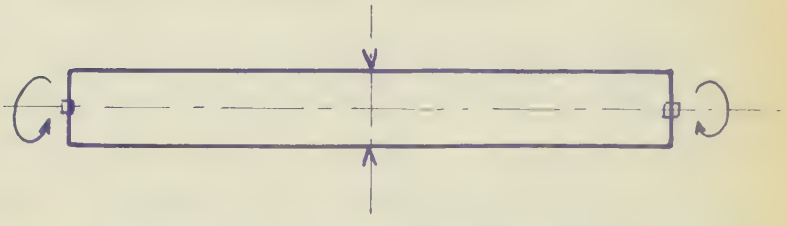


Fig II,6 Barre vibrant en diapason de torsion

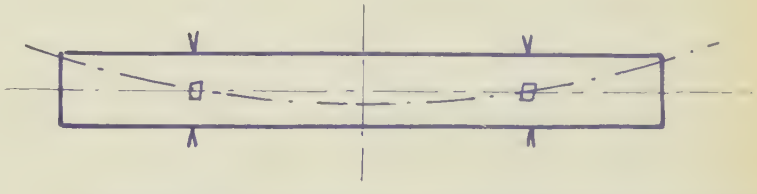
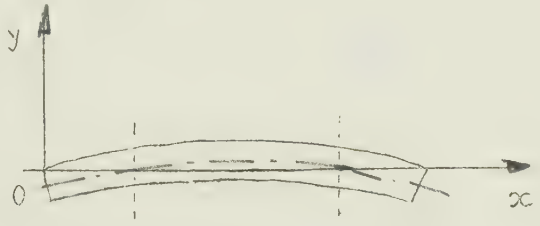


Fig:II,7 Barre en vibrations transversale

DIAPASONS MECANIQUEMENT PARFAITS

2,114 - Le fonctionnement en diapason mécaniquement parfait d'une barre en vibrations transversales avec extrémités libres n'étant pas évident, nous allons le montrer .



Soit Ox l'axe de la fibre neutre de la barre au repos, et xOy un plan fixe . Avec les notations habituelles * et en posant $y = Y(x)\, e^{i\omega t}$, on sait que la solution générale pour la déformée, en négligeant les forces de pesanteur, est :

$$Y = A \operatorname{ch}\alpha x + B \operatorname{sh}\alpha x + C \cos\alpha x + D \sin\alpha x$$

Les extrémités étant libres, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\text{Pour } x = 0 \quad \begin{cases} Y'' = 0 \\ Y''' = 0 \end{cases} \quad (1) \qquad \text{pour } x = L \quad \begin{cases} Y'' = 0 \\ Y''' = 0 \end{cases} \quad (2)$$

d'où :

$$\begin{cases} A(\operatorname{ch}\alpha L - \cos\alpha L) + B(\operatorname{sh}\alpha L - \sin\alpha L) = 0 \\ A(\operatorname{sh}\alpha L + \sin\alpha L) + B(\operatorname{ch}\alpha L - \cos\alpha L) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Le déterminant des coefficients fournit l'équation aux fréquences :

$$1 - \operatorname{ch}\alpha L \cos\alpha L = 0 \quad (4)$$

On aboutit à cette équation sans écrire explicitement que le centre d'inertie de la barre reste fixe ; cela découle certes implicitement de ce que nous n'avons fait intervenir aucune force de liaison pour maintenir la barre .

Vérifions que : $\sum m \cdot \vec{V} = 0$. En projection sur Ox on obtient :

$$\sum_{x=0}^{L} S \delta \, dx \, \frac{dy}{dt} = 0 \quad (5)$$

---

* Voir la table de notation du chapitre V .

Or, $\frac{dy}{dt} = i\omega Y \cdot e^{i\omega t}$, d'où $S \delta i\omega e^{i\omega t} \int_0^L Y\,dx = 0$

L'intégrale s'écrit en fonction de (3) :

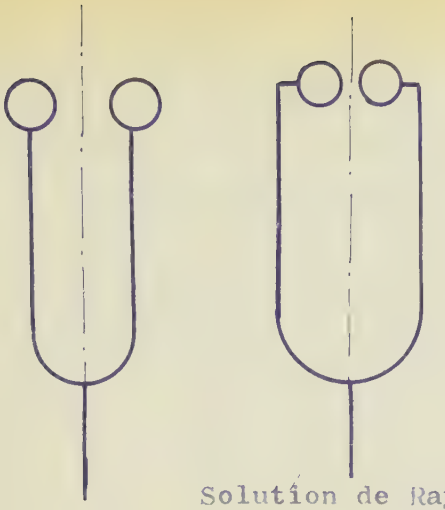
$$A \int_0^L \left[(ch\,\alpha x + \cos\alpha x) - \frac{sh\,\alpha L + \sin\alpha L}{ch\,\alpha L - \cos\alpha L}(sh\,\alpha x + \sin\alpha x)\right] dx = 0$$

Cette équation est bien vérifiée .

Nous n'avons fait aucune hypothèse sur le partiel excité, donc une barre en vibration transversale avec extrémités libres constitue un diapason sur tous ses partiels. Pratiquement, seul le premier est utilisé . Il ne faudrait toutefois pas croire qu'en fixant élastiquement la barre par les noeuds correspondants on n'excitera que ce partiel . Il nous est arrivé fréquemment d'exciter par exemple le partiel 4 du fonctionnement avec ventre à une extrémité et noeud à l'autre . L'excitation par choc d'un tel oscillateur fait également naître des partiels de toutes sortes et autant de couplages . C'est une des raisons pour lesquelles nous ne pensons pas qu'une barre en vibrations transversales puisse un jour constituer un oscillateur valable pour un garde-temps soumis à des vibrations . D'ailleurs, les noeuds n'existent qu'à amplitude infiniment petite : c'est une des raisons qui contraignent à prévoir une fixation élastique pour les déplacements linéaires et angulaires .

2,115 - Solutions approchées .

Si le rayon de courbure des trajectoires des centres de gravité n'est pas infiniment grand, il faut au moins que ces trajectoires admettent une tangente commune au point d'équilibre et que l'amplitude soit faible . Si les centres de courbure sont d'un même côté de la tangente commune, les accélérations normales se composent pour donner une réaction sur le support ; cette réaction est contenue dans le plan de symétrie : il s'agit d'une vibration complexe de fondamental à fréquence 2F . Dans le cas général, la position de repos des centres de gravité n'est pas au point de tangence mais s'en éloigne par rapport au plan de symétrie .Il apparaît alors une composante de la réaction à fréquence F . [10] . Ce cas est celui de la plupart des diapasons classiques en U : ils ne peuvent être parfaits au mieux qu'en première approximation, c'est-à-dire aux amplitudes infiniment petites (fig II, 8 et 9). La solution de RAYLEIGH (fig II, 8 bis) permet d'annuler cette réaction à fréquence F .



Solution de Rayleigh

Fig II,8 Diapason en U des musiciens

Fig II,9 Réalisation moderne

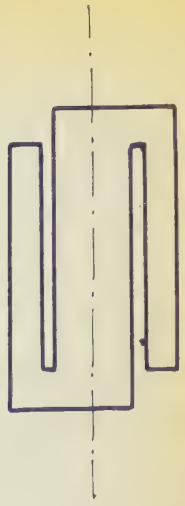


Fig II,IO

SOLUTIONS APPROCHÉES

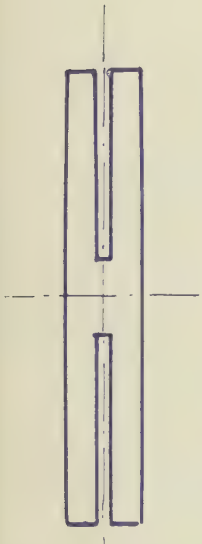


Fig II,11
Diapason en H

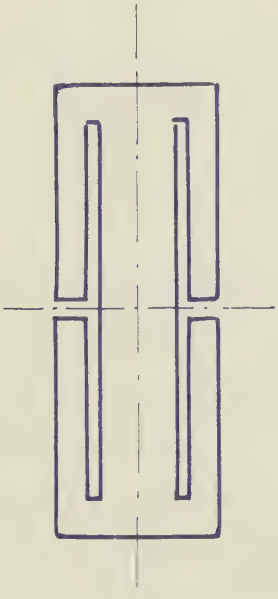


Fig II,12

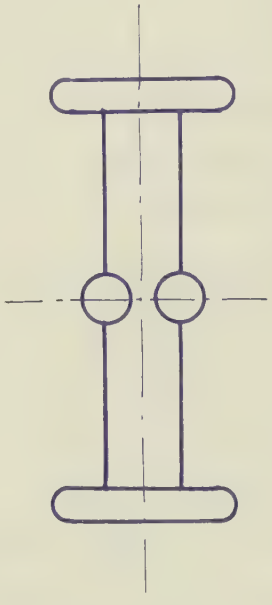


Fig II,I3

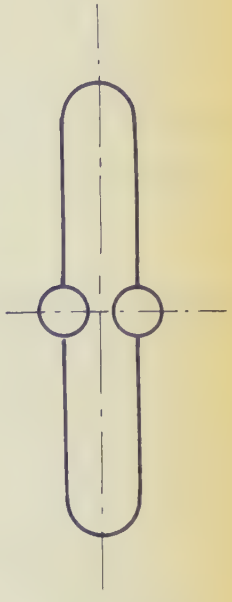
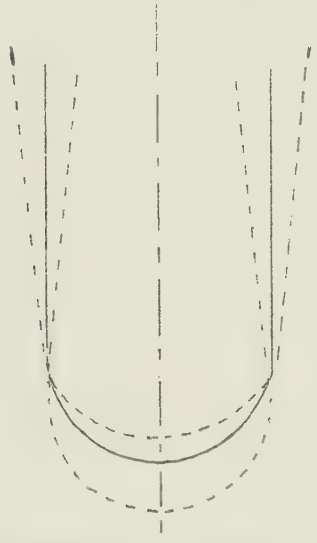


Fig II,14
Diapasons dits " en O "

DIAPASONS PARFAITS DERIVES DES SOLUTIONS A QUATRE OSCILLATEURS

Si les centres de courbure sont de part et d'autre de la tangente commune, les accélérations normales se composent pour donner un couple qui est également une fonction périodique complexe (fig II, 10).

Remarque : Il est d'usage dans les ouvrages de physique et d'acoustique de donner la déformée du diapason en U à section constante avec deux noeuds de déplacement à la base des branches rectilignes. De tels noeuds, au sens usuel du terme, n'existent pas : avec une grossière approximation, la déformée peut passer par un point fixe, mais ce point n'est pas lié à une abscisse curviligne constante ; la fixation par ces noeuds nécessiterait un joint coulissant . On se reportera à BOUASSE pour la discussion de ce problème [12] étudié déjà par CHLADNI . Un tel mode de vibration n'est possible, de toute façon, que si la suspension du diapason est à raideur quasi nulle . Dès lors, et à la limite, ce diapason peut devenir mécaniquement parfait . Hormis les expériences usuelles de physique, nous ne connaissons qu'une réalisation approchante, celle du Dr. KAROLUS [13] . Elle est inutilisable pour un oscillateur portatif .



2,12 - Solutions comportant quatre oscillateurs opposés deux à deux .

Le diapason en U a permis d'annuler les accélérations tangentielles . On a songé à opposer encore deux autres oscillateurs pour annuler les composantes normales, ce qui conduit à un diapason ayant un deuxième plan de symétrie perpendiculaire au premier et aux accélérations normales . On obtient ainsi la solution en H qui n'est pratiquement réalisée qu'à constantes réparties et présente une grande difficulté pour ajuster les quatre branches . (fig II,11) . On peut penser de même à une solution issue du type de la figure II, 10 et montrée en II, 12 . Si l'on raccorde les extrémités des branches de deux diapasons en U on obtient le type en "O", réalisé avec des surcharges, et qui peut être considéré comme un diapason

à deux masses . Dans la réalisation de M. LAFFINEUR [3] (fig II, 13), la suspension élastique est obligatoire, sinon le système se révèle fortement non linéaire . Le véritable diapason en O est celui de la figure II, 15 [11], qui ne prendra tout son intérêt que lorsque l'on arrivera à de bonnes surtensions avec des lames très minces . C'est en effet un oscillateur à constantes réparties qui travaille sur son harmonique deux, donc sa fréquence est assez élevée . Il faut enfin signaler la forme très remarquable de la figure II,16 [4] . Comme le diapason en H, elle se passe à la limite de suspension lorsque la symétrie est parfaite . La réalisation pratique doit toutefois se révéler particulièrement délicate .

C'est probablement à ce type de diapason à deux masses, comportant un axe de symétrie, que les chercheurs peuvent consacrer le plus utilement leurs efforts : la forme des ressorts peut varier à l'infini, le déplacement rectiligne des masses est facilement obtenu .

2,13 - Solutions à n masses .

Nous passons évidemment à un cas limite qui conduit exclusivement à des systèmes à constantes réparties et que l'on acceptera ou non de ranger parmi les diapasons . Cette solution étant obtenue par extension de la précédente, elle comporte au moins un axe de symétrie . L'ensemble travaille en tension ou en déformation planes, souvent avec distribution symétrique des tensions . Le type de ces oscillateurs est le disque en vibrations radiales (fig II, 17) ; il présente une composante de la déformation suivant son épaisseur . Une barre ou un tube peuvent également vibrer avec une déformation radiale, pure cette fois . (fig II, 18 et 19) . La figure II, 20 montre également un fonctionnement en diapason mécaniquement parfait, obtenu par cisaillement .

L'essentiel pour tous ces oscillateurs réside dans l'homogénéité du matériau, souvent piézoélectrique . Malgré leur perfection, ces oscillateurs restent inutilisables en horlogerie vu leur fréquence très élevée . Ils constituent une partie des différents modes de mise en oeuvre des quartz . D'autres modes entraîneraient un déplacement du centre d'inertie s'ils existaient à l'état pur ; aussi dans le montage par fils élastiques, ils impliquent des couplages . C'est le cas du cisaillement d'épaisseur qui conduirait à un couple résultant .

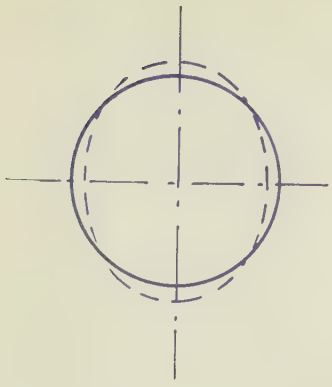


Fig II,I5

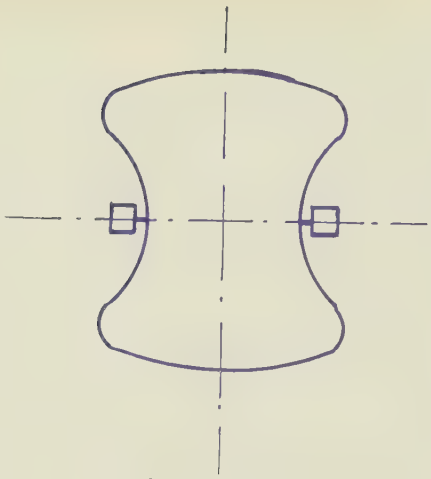


Fig II,I6

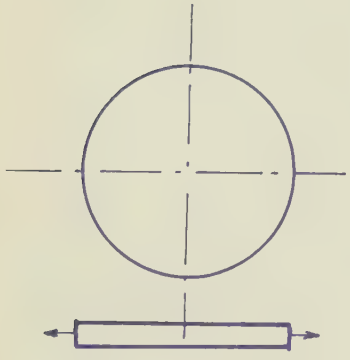


Fig II,I7

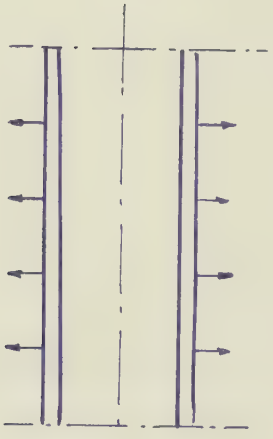


Fig II,I9

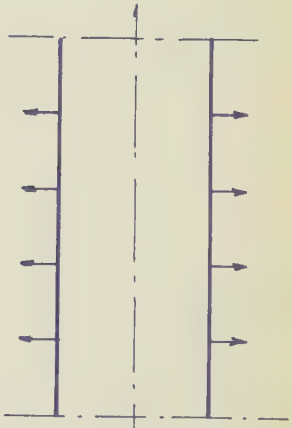


Fig II,I8

vibrations radiales

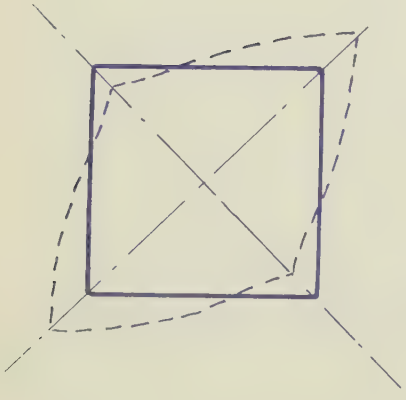


Fig II,20 Diapason
de cisaillement

2,2 - Raccordement des oscillateurs constituants . Diapasons élastiquement parfaits.

2,21 - On sait à quel point les problèmes pratiques d'élasticité sont souvent inextricables ; or, nombre de diapasons présentent justement au raccordement des oscillateurs constituants, une répartition de contrainte incalculable . Dès lors, leur fréquence n'est déterminée que par des formules empiriques comme celle de MERCADIER [14] , et toute étude théorique de l'isochronisme de ces oscillateurs reste pratiquement impossible . Le cas type est celui du diapason en U . Nous avons essayé d'étudier par photoélasticimètrie la répartition des contraintes dans le talon : malheureusement, les difficultés expérimentales ne nous ont pas encore permis d'aboutir à une étude dynamique valable . Nous pensons poursuivre ce travail . L'étude statique fournit tout de même des réseaux suffisamment approchés. Les figures II, 21 et 22 montrent les isoclines de paramètre 5 et 45°, photographiées sur la maquette en plexiglas d'un diapason de laboratoire . Un modèle réalisé en araldite montre aussi par une isocline, figure II, 23, que la contrainte est encore appréciable dans le support ; ailleurs, les isochromes se superposent aux isoclines, ce qui rend la photographie peu lisible . La figure II, 24 montre cette fois le seul réseau d'isochromes . Le réseau d'isoclines dessiné figure II, 25 montre ~~trois~~ quatre points singuliers et deux lignes neutres ; il nous a permis de tracer le réseau d'isostatiques correspondant (fig. II, 26).

Si cette méthode expérimentale peut donner toute la précision désirée quant à la répartition des contraintes, il faut avouer qu'elle n'aide guère à la détermination de la déformée dynamique et plus précisément à la connaissance des trajectoires des centres d'inertie de chaque branche . Certes, il n'est pas impossible d'y aboutir, mais le travail d'intégration graphique nécessaire est considérable . Nous préférons l'entreprendre à partir de l'étude par photoélasticimétrie dynamique .

Le calcul d'un diapason en W par exemple, qui nécessite la connaissance rigoureuse de la déformée, ne nous paraît donc pas plus faisable par cet intermédiaire expérimental que par la théorie pure .

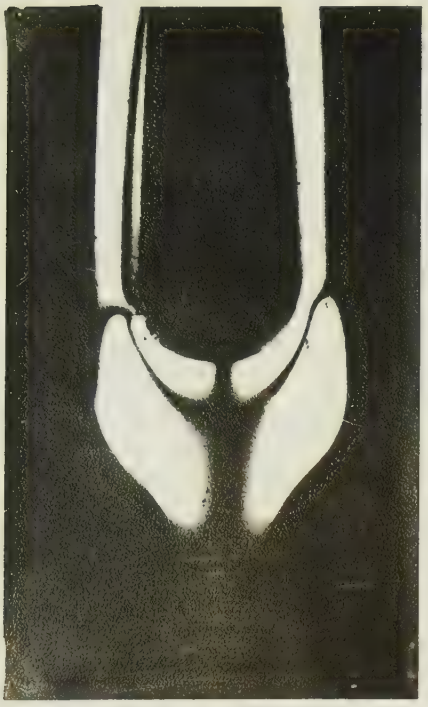


Fig. II, 21
Isochromes 5°

Fig. II, 22
Isoclines 45°

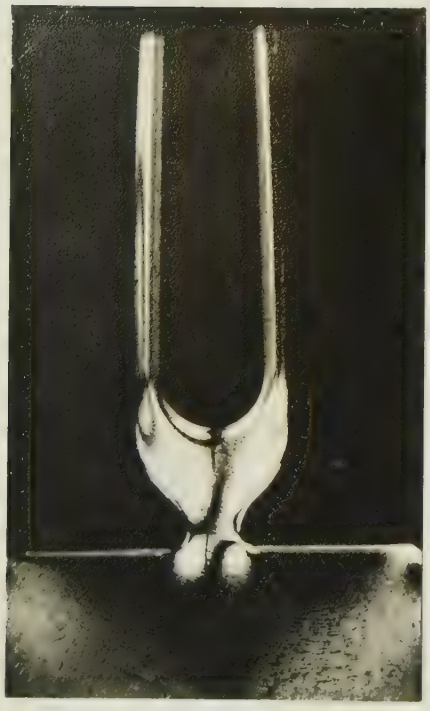


Fig. II, 23
Contraintes dans le support

Fig. II, 24
réseau isochromes

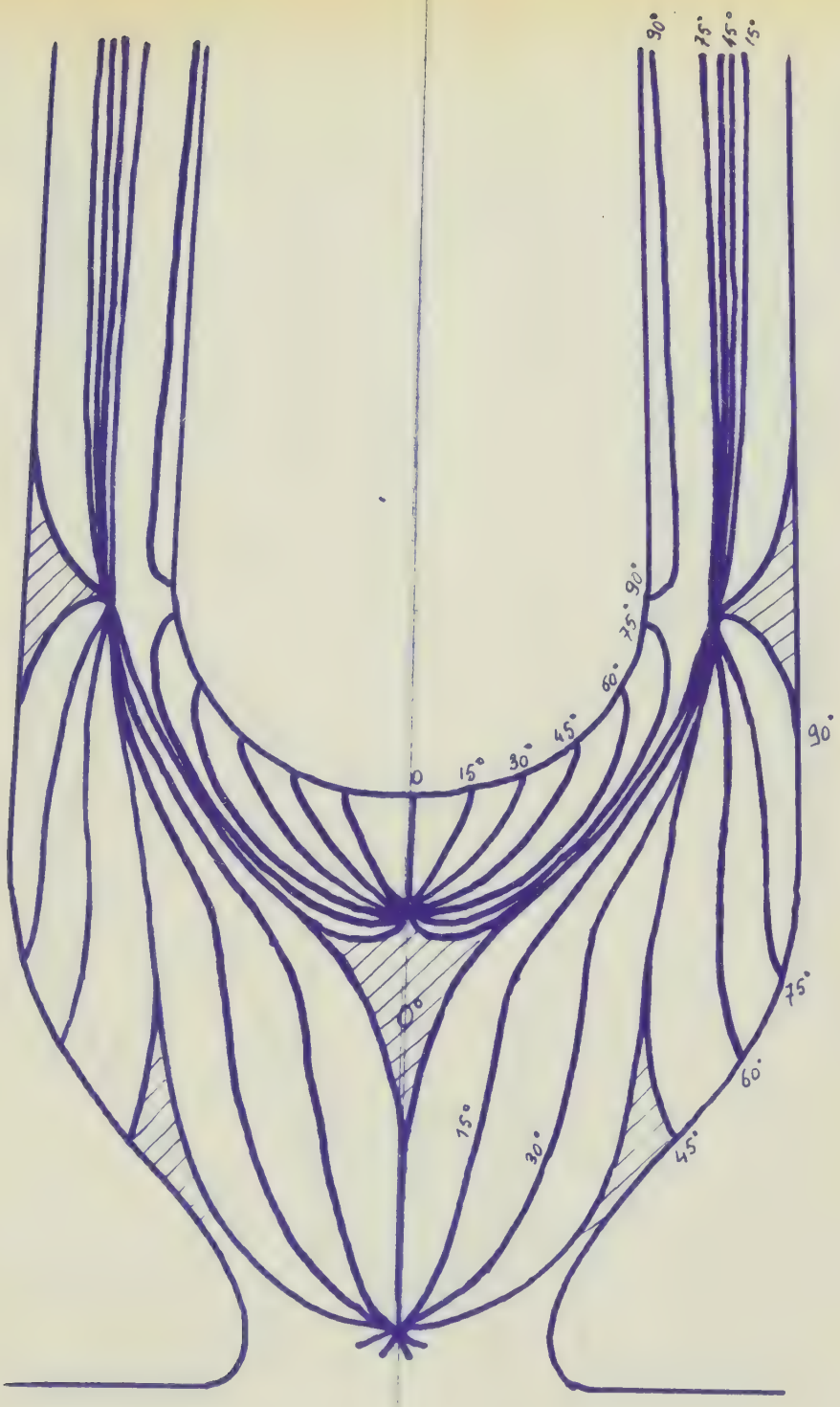


Fig : II 25 Réseau d'isoclines

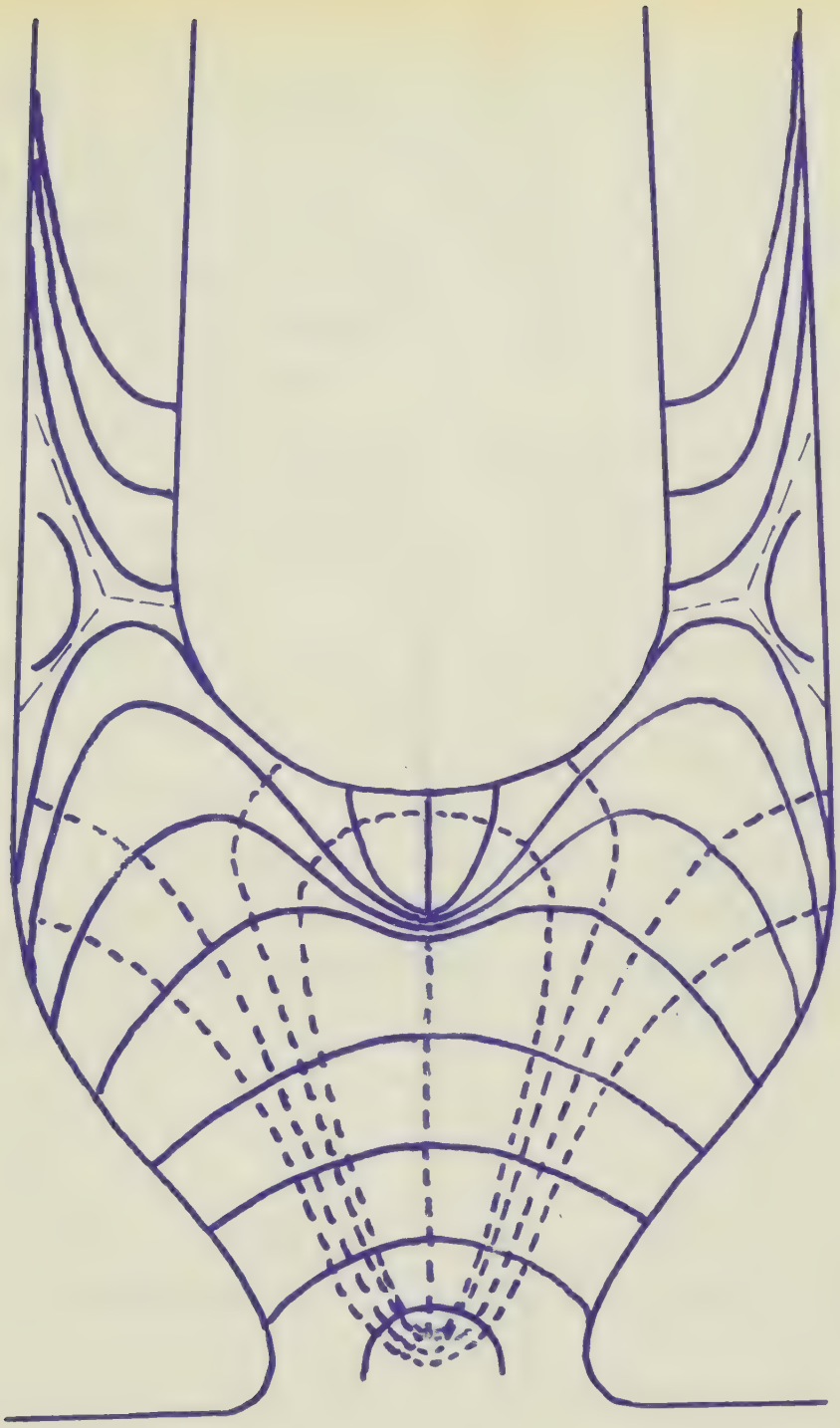


Fig: II 26 Réseau d'isostatiques

2,22 - La solution est sans aucun doute dans les diapasons dont les oscillateurs constituants sont encastrés de façon parfaite, par leur principe même, au niveau de leur plan de symétrie . Ils se raccordent avec une section constante, sans zone intermédiaire à gradient de contrainte élevé et inconnu . Les diapasons des figures II, 3, 4, 5, 6, 7, 15 et 16 sont ainsi constitués . Nous les appellerons "élastiquement parfaits". D'où la deuxième proposition de notre thèse :

> Un diapason constitué de deux oscillateurs élémentaires est "élastiquement parfait" lorsque le raccordement de ces oscillateurs se fait directement au niveau du plan de symétrie, sans changement de section et de direction des parties élastiques .

La fibre neutre détermine souvent à son intersection avec le plan de symétrie au moins un centre de symétrie statique . Dans certaines réalisations, ce centre de symétrie reste tel dynamiquement, comme dans les diapasons de torsion et d'extension .

2,23 - Le diapason élastiquement parfait présente de plus une supériorité fondamentale par rapport aux autres réalisations : en effet, c'est un système à deux degrés de liberté et non plus à trois . La figure II, 27 montre son schéma mécanique équivalent, par rapport à celui du diapason classique, figure II, 28.

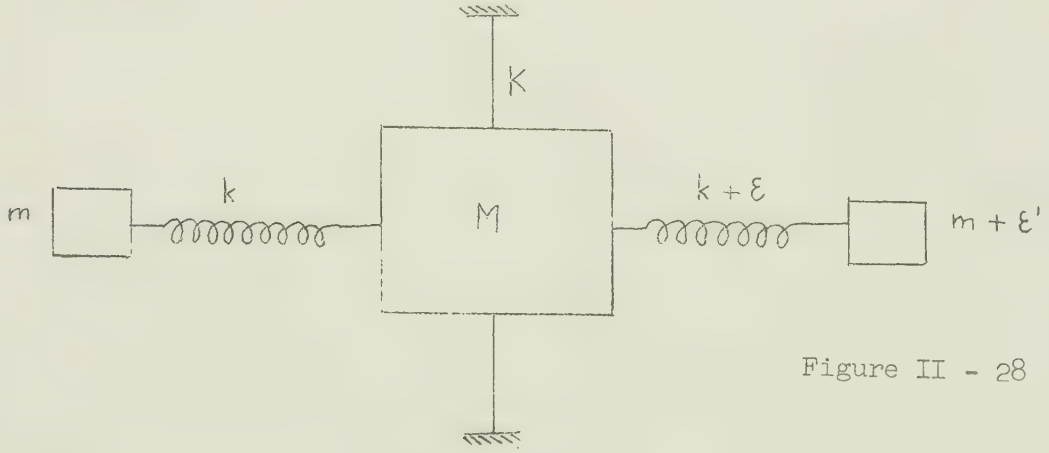


Figure II - 28

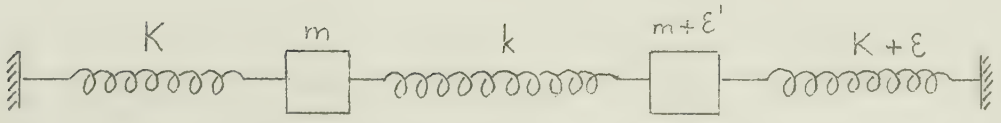


Figure II - 27

L'avantage fondamental réside en ce qu'il n'y a plus à réaliser l'identité parfaite de deux oscillateurs tant dans leur raideur que leur inertie ; les deux oscillateurs n'en font plus qu'un, la surtension n'est pas affectée par de légères dissymétries des masses ou par les modifications de couplage dues par exemple aux champs de forces parasites . C'est là en effet le grave défaut des diapasons en U ou en H . Nous reviendrons au chapitre suivant sur cet aspect primordial de l'étude des diapasons . Notons en tout cas que le diapason des musiciens, à section constante, a été abandonné pour sa réaction trop importante sur son support. Cette évolution n'est donc pas en contradiction avec notre propos .

-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE II

[1] - B. DECAUX : déjà cité au chap. 1 . L'auteur signale les essais faits vers 1930 par le N.P.L sur les vibrations longitudinales d'une longue barre de silice. Cette barre constituait un diapason d'extension . Voir également les travaux de FORSTER et KOSTER faits sur un oscillateur identique en alliages Fer-Nickel (1937) .

[2] - Brevet allemand n° 153 801 das . Ce brevet concerne pratiquement un diapason d'extension avec son dispositif de suspension .

[3] - M. LAFFINEUR : "Diapason à entretien électronique destiné à un générateur de courant de basse fréquence " (Actes du V° Congrès International de Chronométrie 1954, p. 687)

[4] - Brevet français n° 1 334 105 : "Vibreur à flexion pour oscillateur de fréquence-étalon, notamment pour instruments chronométriques". (Brevet original suisse n° 10 885/61 déposé le 18.9.61) . Ce brevet comporte en fig. 3 et 4 un diapason tout à fait remarquable . Les fig. 1 et 2 correspondent rigoureusement au diapason de LAFFINEUR .

[5] - Notes de M. LAVET concernant l'oscillateur du chronomètre de marine japonais HATTORI SEIKO . Cet oscillateur fonctionne en diapason élastiquement parfait selon une disposition très classique . Nous n'avons aucun renseignement concernant sa surtension, probablement mauvaise vu le rapport surface/volume et la section circulaire .

[6] - SEEMAN et M. SIOL : "Un appareil pour la détermination de l'amortissement élastique des métaux" (Revue de métallurgie 1955, n°II, p. 864) .

[7] - J. ZEMANEK et I. RUDNICK : "Attenuation and dispersion of elastic waves in a cylindrical bar" . (The journal of the acoustical society of America. Vol 33, n°10, oct 1961, p. 1283)

[8] - Documentation de la "Brush Crystal Co Ltd" .

[9] - Documentation de la société "Quartz et Silice" .

[10] - BOUASSE : "Verges et plaques . Cloches et Carillons" (Delgrave 1927) 1927, p. 192)

[11] - P.FLEURY et J.P. MATHIEU : "Vibrations mécaniques . Acoustique" (Eyrolles 1955, p. 219) et BOUASSE , ibidem p. 228

[12] - BOUASSE : ibidem p. 196 et 222

[13] - A. KAROLUS : "Eine Stimmagabel aus Quartzkristal" (Actes du V° Congrès International de Chronométrie, p. 692 fig.1)

[14] - R. CHALEAT : "Etude théorique et expérimentale des diapasons à lames minces" (Annales françaises de Chronométrie. 1er Tri. 1959)

-:-:-:-:-

CHAPITRE III

ETUDE DES PERTURBATIONS DUES AUX FORCES EXTERIEURES

3,0 - Nous avons signalé au chapitre premier que les diapasons étaient très sensibles aux forces extérieures et que cela limitait quelquefois leurs applications . Nous diviserons pour leur étude ces forces extérieures en forces de liaison,celles-ci étant réalisées sans frottement par des pattes de fixation élastiques, et en forces appliquées . Nous classerons ces dernières en :

- Forces ne dépendant que de la position, qui comprennent principalement le champ uniforme de pesanteur et le champ magnétique . Nous n'étudierons pas ce dernier, la solution à notre avis étant de rechercher des alliages amagnétiques . Ces forces sont des forces massiques, donc directement appliquées .

- Forces ne dépendant que de la position et de la vitesse : C'est le cas où l'oscillateur est soumis à une accélération linéaire constante, comme lors du lancement d'une fusée par exemple . C'est également le cas d'un oscillateur soumis à une rotation de vitesse angulaire constante $\vec{\Omega}$; on sait par exemple que certains gyromètres utilisent un diapason pour mesurer cette vitesse angulaire . Ces forces peuvent également être considérées comme directement appliquées .

- Forces dépendant de la position, de la vitesse et du temps : Nous trouvons là certains régimes particulièrement durs de perturbations , tels que les vibrations rectilignes appliquées au support, et beaucoup plus rarement les vibrations angulaires . Les chocs font également partie de cette catégorie de forces appliquées par l'intermédiaire du support et que la suspension modifie .

3,1 - La fixation des diapasons et les forces de liaison correspondantes

3,11 - Un seul fil très fin suffit à supporter les diapasons d'horlogerie ; malheureusement cette solution ne les rend pas transportables .

Il faut donc obligatoirement considérer un élément de raideur non nulle . Si le diapason doit fournir de l'énergie mécanique, il faut que l'élément de fixation limite ses degrés de liberté . De plus, et en toute rigueur, il faut que l'énergie mécanique soit prélevée de manière symétrique sur les deux branches selon une disposition connue d'ailleurs depuis longtemps [1] . Nous nous affranchirons de cette servitude dans la suite de notre étude, considérant que l'énergie est fournie électriquement par des fils de raideur nulle .

Le problème essentiel est que les éléments de liaison participent le moins possible à la vibration, faute de quoi ils constituent des lignes de fuite de l'énergie , et une réaction réapparaît sur le support . Il en découle que la réduction de section des éléments de liaison est hautement souhaitable : ce sont à la limite des fils de sections diverses . Leur raideur est donc faible dans certaines directions, et nous réalisons du même coup la suspension de l'oscillateur, c'est-à-dire son isolation à la fois active et passive dans ces directions privilégiées . Dès lors, l'amplitude du déplacement du point où s'effectue la liaison à l'oscillateur n'est pas très critique, dans la mesure du moins où il se fait dans une direction de faible raideur .

3,12 - Il reste tout de même à déterminer le point optimal de fixation . On est tenté de rechercher dans ce but les plans nodaux ou les lignes nodales qui sont fréquemment situés dans le plan de symétrie du diapason. S'il n'y a qu'un point nodal, on doit constater qu'il est généralement inaccessible. Or, c'est par abus de langage que l'on parle de plan et même souvent de ligne nodals . Par exemple, on peut être tenté de fixer les diapasons d'extension et de torsion des figures II, 5 et 6 par leur plan de symétrie; mais ce plan ne constitue un plan nodal que relativement à une composante déterminée de la déformation . Dans le diapason d'extension, c'est un noeud pour les déformations longitudinales, mais un ventre pour les déformations radiales : il n'y a en réalité qu'un point nodal . Le diapason de torsion comporte une ligne nodale, axe de symétrie ; en tout autre point du plan de symétrie considéré, il y a rotation de la tangente aux fibres . Dans ces deux exemples, la fixation par une plaque très mince,

située dans le plan de symétrie modifie instantanément et profondément la raideur d'une section Δx de ressort . La répartition des contraintes subit aussi une profonde modification et l'expérience montre que l'amortissement augmente beaucoup plus que le laisse supposer la section de fuite de l'énergie . Cette question fera d'ailleurs l'objet d'une communication ultérieure du Laboratoire .

On peut prendre un autre exemple avec une barre en vibrations transversales . La théorie élémentaire prévoit deux lignes nodales à une distance $x = 0{,}224\ L$ des extrémités, mais il y a en réalité d'une part une distorsion des sections droites, plus ou moins accusée suivant leur forme, et d'autre part un déplacement des noeuds . Si donc on fixe ce diapason de flexion par des fils tendus passant par les lignes nodales, on ramène en réalité une raideur non négligeable sur la section droite, et une tension tendant à s'opposer au rapprochement des lignes nodales pendant la vibration.

3,13 - La seule solution est de choisir une ligne nodale traversant une région de contrainte nulle . Il n'en existe pas sur tous les oscillateurs ; dans le diapason de flexion de la figure II, 3,1a fixation se fait par des fils tendus coïncidant avec les lignes nodales des surcharges . Il n'y a là pratiquement aucune contrainte due aux vibrations ; le fil ramène un couple de torsion aussi faible qu'on le désire, et cet effet est linéaire . De même, le diapason de la figure II, 6 est avantageusement fixé par des fils placés aux extrémités dans le prolongement de l'axe de symétrie qui est une ligne nodale . Nous énonçons donc notre troisième proposition :

> La fixation d'un diapason est la plus parfaite lorsqu'elle se fait par des noeuds de déplacement linéaire qui sont également noeuds de contrainte .

Répétons que des déplacements linéaires ne sont pas gênants dans la mesure où ils s'effectuent dans une direction pour laquelle l'isolation active de l'oscillateur est assurée, et dans la mesure où le couplage s'effectue avec une vibration linéaire . Ce n'est assurément pas le cas des fils tendus en vibrations transversales, éléments fortement non linéaires, à

l'échelle de la chronométrie bien sûr . On pourrait rechercher sur les surcharges des points qui soient à la fois noeuds de déplacements linéaires et angulaires . On peut affirmer qu'il n'en existe pas, car alors la force vive de la surcharge serait nulle et elle ne servirait à rien .

Sur les figures du chapitre II, les points de fixation idéaux sont repérés par le signe □ . Comme pour le quartz, on pourrait encore penser faire travailler les fils en quart d'onde . Nous n'avons pas expérimenté ce montage, et verrons au chapitre suivant ce qu'il faut en penser .

Il est à remarquer que cette troisième proposition renforce la seconde : elle va dans le sens d'une liberté totale du diapason au niveau de son plan de symétrie .

3,14 - Etudions la dynamique du diapason élastiquement parfait et suspendu, sous sa forme réelle légèrement dissymétrique :

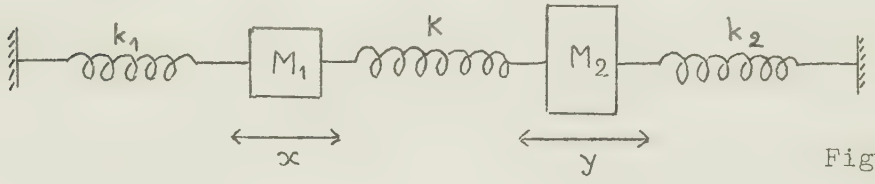


Figure III, 1

Soient : x et y les degrés de liberté des masses M_1 et M_2
k_1 et k_2 la raideur des ressorts de suspension
K la raideur du ressort qui relie les masses.

Posons :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K + k_1}{M_1}} \quad \text{pulsation de } M_1 \text{ , } M_2 \text{ étant bloqué}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K + k_2}{M_2}} \quad \text{pulsation de } M_2 \text{ , } M_1 \text{ étant bloqué}$$

Négligeons le frottement visqueux dont on sait le peu d'influence sur la fréquence . Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} M_1 x'' + (K + k_1)x = K y \\ M_2 y'' + (K + k_2)y = K x \end{cases} \qquad (1)$$

Or, $\frac{K}{M_1} = \frac{K}{K + k_1} \omega_1^2$ et $\frac{K}{M_2} = \frac{K}{K + k_2} \omega_2^2$

d'où :

$$\begin{cases} x'' + \omega_1^2 x = \frac{K}{K + k_1} \omega_1^2 y \\ y'' + \omega_2^2 y = \frac{K}{K + k_2} \omega_2^2 x \end{cases} \qquad (2)$$

Ecrivons qu'il existe des solutions de la forme $e^{j\omega t}$. L'équation aux pulsations propres est donnée par le déterminant :

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \omega_1^2 & -\frac{K}{K + k_1} \omega_1^2 \\ -\frac{K}{K + k_2} \omega_2^2 & -\omega^2 + \omega_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

Posons : $\lambda^2 = \frac{K^2}{(K + k_1)(K + k_2)}$

Il vient :

$$\omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega^2 + (1 - \lambda^2)\, \omega_1^2\, \omega_2^2 = 0 \qquad (3)$$

D'où les racines :

$$\Omega^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{4} + \lambda^2 \omega_1^2\, \omega_2^2}$$

Supposons que ω_1 et ω_2 soient très voisins, et appelons ω' leur valeur moyenne :

$$\Omega^2 \simeq \omega'^2 (1 \pm \lambda)$$

k_1 et k_2 sont toujours très faibles devant K, donc λ est peu inférieur à 1 .

$\Omega_s^2 = \omega'^2 (1 - \lambda)$ correspond à la fréquence de suspension très basse de l'oscillateur .

$\Omega^2 = \omega'^2 (1 + \lambda)$ correspond à la fréquence de fonctionnement normal du diapason .

$P_o$sons $\dfrac{\Omega}{\Omega_s} = n$

$$n^2 = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{n^2-1}{n^2+1}$$

n étant de l'ordre de 100, on peut écrire :

$$\Omega^2 = 2\omega'^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\boxed{\Omega = \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)\omega'} \qquad (4)$$

On voit que dans les conditions habituelles le terme provenant de la suspension est très faible .

3,15 - Le rapport de la force transmise au support à la force $P = P_o \cos \omega t$ appliquée aux masses est connu sous le nom de "facteur d'isolation active" i_a [3] . Soit Q_s la surtension de la pulsation propre Ω_s ; on a suivant la formule bien connue :

$$i_a = \sqrt{\frac{1 + n^2 Q_s^{-2}}{(1-n^2)^2 + n^2 Q_s^{-2}}} \qquad (5)$$

Q étant au moins de l'ordre de 10^2 , pour n grand, le facteur d'isolation peut alors se mettre sous la forme : $i_a \simeq n^{-2}$. La force transmise au support est donc très faible .

La figure III, 2 donne de façon plus précise le facteur d'isolation en fonction de n et Q_s . Nous calculerons au chapitre suivant l'amortissement ramené sur le diapason par le travail des forces de liaison ; on peut déjà se rendre compte par la valeur de i_a qu'il est extrêmement faible .

3,2 - Perturbation due au champ de pesanteur .

3,21 - Examinons d'abord le cas du diapason mécaniquement parfait : il peut être représenté par le schéma figure III, 3 . Nous supposons qu'il s'agit de deux oscillateurs à constantes localisées k et M .

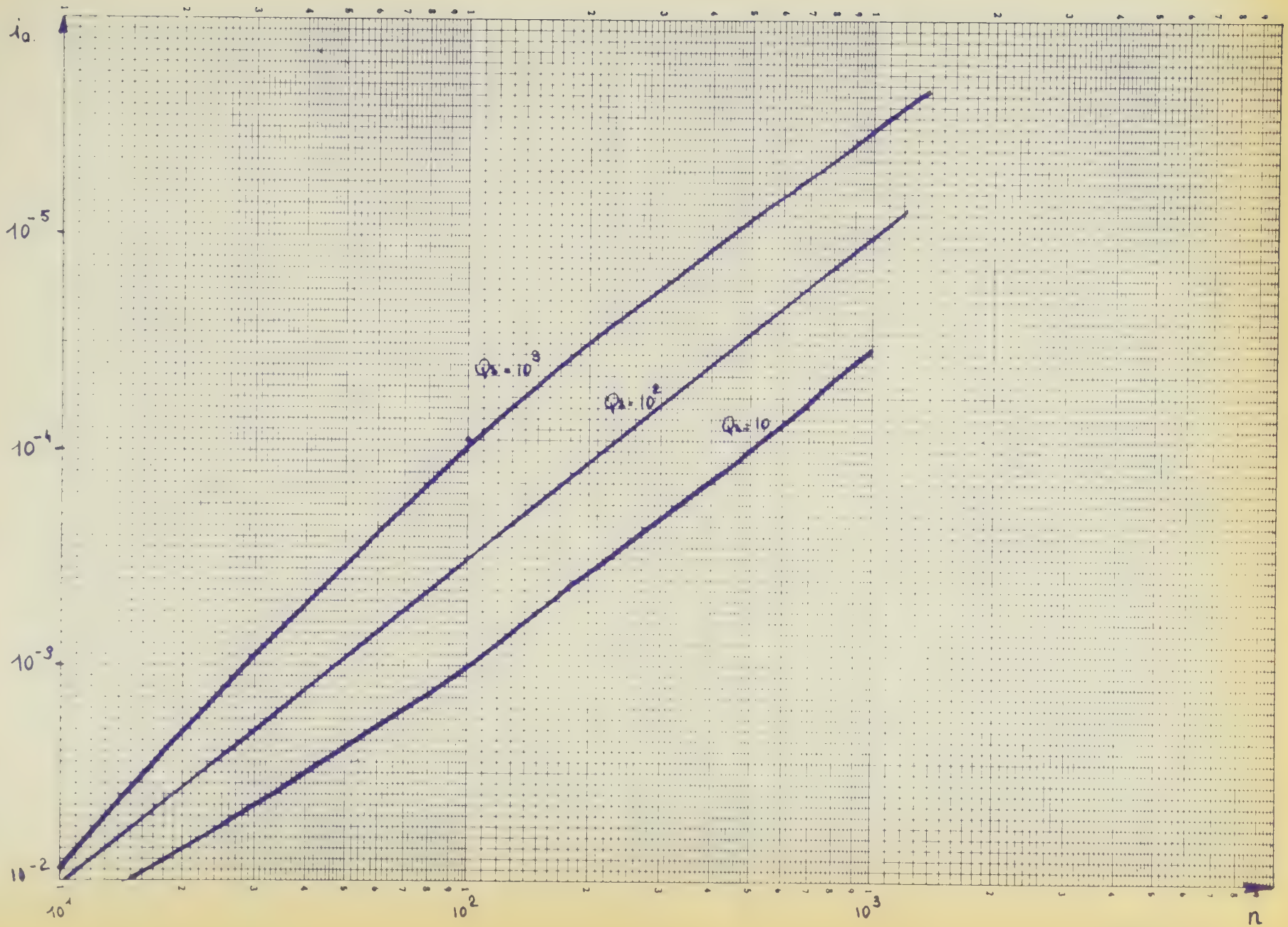


Fig III,2

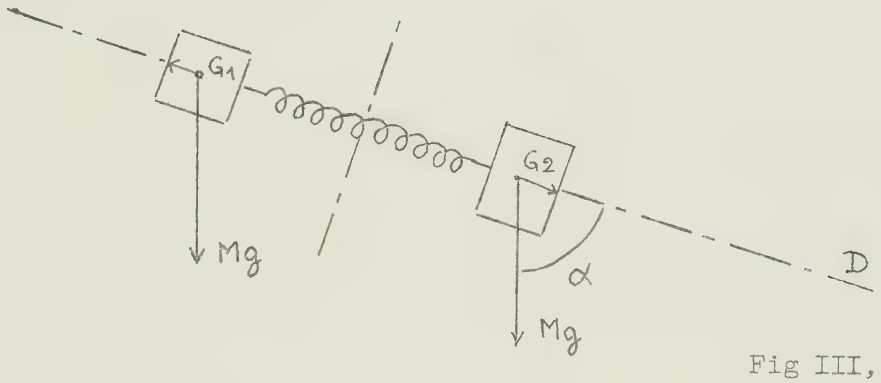


Fig III, 3

Soient G_1 et G_2 les positions de repos de leur centre de gravité . On sait que ces derniers se déplacent sur la droite D passsnt par G_1 et G_2 . Soit α l'angle de la droite D avec la verticale . En projection sur D les forces de pesanteur agissant sur G_1 et G_2 sont égales à $Mg \cos \alpha$. Ces composantes sont indépendantes de l'amplitude d'oscillation . Le mouvement des deux oscillateurs devient de la forme :

$$M x'' + k x = Mg \cos \alpha$$

Leur période est bien indépendante de α . L'effet de la pesanteur est donc de déplacer G_1 et G_2 dans le même sens d'une quantité :

$$u = \frac{Mg \cos \alpha}{k}$$

Les masses oscillent avec la même période autour de leur nouvelle position d'équilibre .

Un oscillateur simple est donc insensible à la pesanteur si son centre de gravité se déplaxe sur une droite, et nous avons a fortiori la propriété suivante :

> La période d'un diapason à quantité de mouvement et moment cinétique nuls, donc mécaniquement parfait, est indépendante de sa position dans le champ de pesanteur .

Il est bien évident que le système doit pouvoir être considéré comme linéaire jusqu'aux amplitudes $x_o + \frac{Mg}{k}$. Bien souvent, ce décalage entraîne un déphasage des impulsions d'entretien, donc un défaut d'isochronisme .

3,22 - Soit maintenant un diapason imparfait constitué de deux oscillateurs à constantes localisées k et M . Soit I leur moment d'inertie par rapport à leur centre de gravité, et soient G_1 et G_2 les positions de repos de ces centres de gravité . Ces derniers se déplacent sur des trajectoires de centre de courbure O_1 et O_2 et de rayon de courbure identique ρ . (fig III, 4)

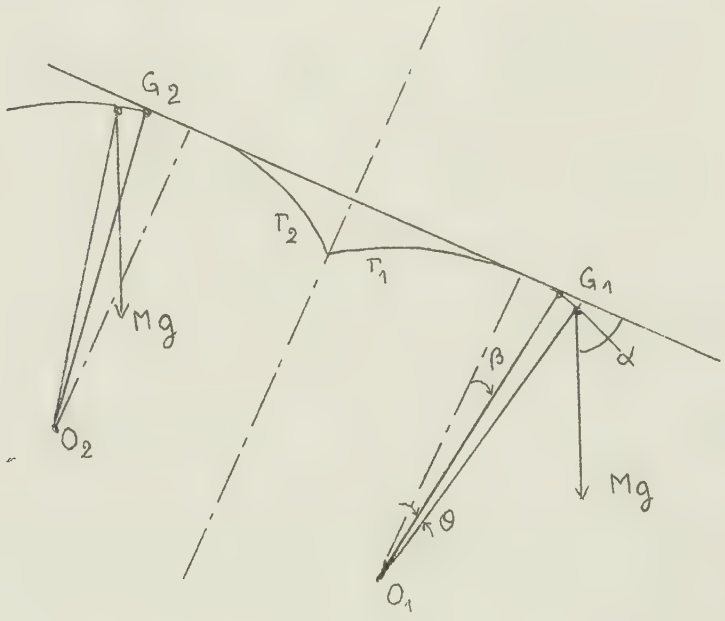


Fig III, 4

Supposons en première approximation que les amplitudes soient petites et que le rayon de courbure puisse être considéré comme constant . Nous pouvons étudier le mouvement de chaque oscillateur autour de O_1 et O_2 . Soit θ leur amplitude : le mouvement est de la forme :

$$(I + M\rho^2)\,\theta'' + k\,\theta = 0$$

Soit α l'angle de la tangente aux trajectoires avec la verticale descendante et soit β l'écart angulaire de la position de repos des centres de gravité par rapport aux points de tangence . Le couple dû à la pesanteur s'écrit [4]

pour le premier oscillateur et par rapport à O_1 :

$$C_1 = Mg\,\rho \cos\left[(\alpha - \beta) + \theta\right]$$

pour le second :

$$C_2 = Mg\,\rho \cos\left[(\alpha + \beta) + \theta\right]$$

Nous considérons les petites amplitudes, d'où :

$$C_1 = Mg\,\rho\left[\cos(\alpha - \beta) + \theta \sin(\alpha - \beta)\right]$$
$$C_2 = Mg\,\rho\left[\cos(\alpha + \beta) + \theta \sin(\alpha + \beta)\right]$$

Les deux équations des mouvements s'écrivent donc :

$$(I + M\rho^2)\,\theta'' + \left[k - Mg\,\rho \sin(\alpha - \beta)\right]\theta = Mg\,\rho \cos(\alpha - \beta)$$
$$(I + M\rho^2)\,\theta'' + \left[k - Mg\,\rho \sin(\alpha + \beta)\right]\theta = Mg\,\rho \cos(\alpha + \beta)$$

Supposons que I soit négligeable devant $M\rho^2$, et soit ω la pulsation du mouvement :

$$\omega^2 \simeq \frac{k}{M\rho^2}$$

Les nouvelles raideurs des oscillateurs peuvent donc s'écrire :

$$k_1 = k\left[1 - \frac{g \sin(\alpha - \beta)}{\rho\,\omega^2}\right] \qquad k_2 = k\left[1 - \frac{g \sin(\alpha + \beta)}{\rho\,\omega^2}\right]$$

On constate que les perturbations ne sont égales que pour $\beta = 0$. Il s'avère donc bien une nouvelle fois important de s'efforcer de construire des diapasons en U dont les centres de gravité de chaque branche se déplacent aux petites amplitudes sur la tangente commune aux trajectoires. En seconde approximation, on montrerait aisément que la perturbation étudiée est non linéaire. Pour $\beta = 0$ les marches extrêmes du diapason valent, en secondes par jour :

$$M = \pm\ 86\,400 \cdot \frac{1}{2}\ \frac{\Delta k}{k} = 43\,200\ \frac{g}{\rho\,\omega^2}$$

Dans le cas du diapason en H, si les perturbations s'annulent, il faut bien comprendre que c'est grâce à une modification des couplages. Il reste un effet secondaire de la perturbation due à la pesanteur qui est donc

de ramener un amortissement supplémentaire sur l'oscillateur . De même pour le diapason en U dans lequel $\beta \neq 0$.

En conclusions:

> La perturbation de période que subit un diapason imparfait de la part du champ de pesanteur est donc inversement proportionnelle au rayon de courbure de la trajectoire des centres de gravité des deux oscillateurs constituants, et inversement proportionnelle au carré de la fréquence .

3,3 - Perturbation due aux forces ne dépendant que de la position et de la vitesse .

3,31 - Cas d'une accélération linéaire constante .

Soit $\vec{\gamma}_e$ l'accélération d'entraînement du support de diapason : l'accélération absolue se limite à $\vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r$ puisque nous sommes en translation . Le problème est donc absolument identique à celui du paragraphe 3,2 . Il suffit d'ajouter un terme $M\gamma_e \cos \alpha'$ en 3,21 et $M\gamma_e \cos \left[(\alpha' \pm \beta) + \theta\right]$ en 3,22. Dans les plus mauvaises circonstances, le système doit encore être linéaire aux amplitudes

$$x_o + \frac{Mg}{k} + \frac{M\gamma_e}{k}$$

3,32 - Cas d'une vitesse angulaire constante .

Ce problème a été étudié très en détail dans plusieurs publications concernant les gyromètres à diapasons [6], [7], [8], [9] ; aussi, contentons-nous d'en présenter l'essentiel .

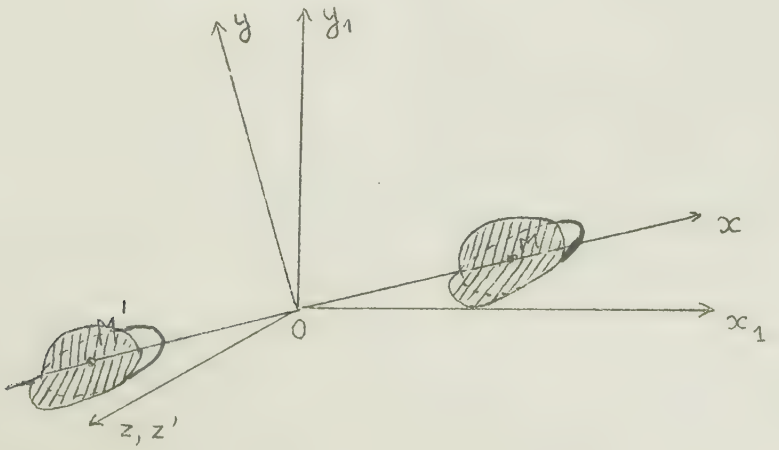


Fig III, 5

Soient M et M' les deux masses d'un diapason supposé mécaniquement parfait . La composante de la rotation suivant Ox est sans effet . Les composantes suivant Oy et Oz causent d'abord un décalage de la position d'équilibre des deux masses soumises à la force centrifuge ; nous avons vu que cela n'entraînait aucun défaut d'isochronisme . Ensuite la présence d'une accélération complémentaire transforme la vibration rectiligne en vibration elliptique, dans le plan xOy pour une rotation suivant Oz , et dans le plan xOz pour une rotation suivant Oy (fig. III, 5) . Le problème ne peut être analysé de façon précise en dehors d'une structure particulière de diapason . Disons seulement que l'on a tendance à exciter des modes de torsion autour de Oy et Oz . Ces modes sont couplés ou non à la vibration principale suivant les réalisations . Dans le cas général, ces effets sont extrêmement faibles si les modes parasites ne sont pas accordés sur la fréquence du diapason .

3,4 - Perturbations dues aux vibrations imposées au support .

3,41 - On sait que les appareils qui risquent en service normal d'être soumis à des vibrations sont systématiquement essayés aux vibrations suivant trois axes perpendiculaires, avec balayage lent en fréquence de 3 à 2000 Hz par exemple, l'amplitude étant imposée dans le bas de la gamme et l'accélération dans le haut . Les trois axes étant généralement donnés par les faces du boitier de l'appareil, le constructeur est libre de la disposition intérieure des éléments . Nous considérerons donc que nous sommes libres du choix des axes d'essai par rapport au diapason .

On peut admettre que tous les partiels de tous les modes de vibrations dont la fréquence rentre dans la gamme d'essai seront plus ou moins excités . D'ailleurs, cet essai révèle souvent plus de résonances qu'on en suppose au seul examen du système . Deux problèmes se posent donc : celui de la résistance mécanique du diapason, suspension comprise, aucune résonance ne devant entraîner une contrainte exagérée, voire une rupture, et celui du couplage entre la vibration principale et les différents modes excités . C'est ce deuxième problème qui nous occupe plus particulièrement . Il s'agit de rechercher parmi tous les modes de vibrations possibles du système ceux qui sont couplés

avec la vibration entretenue . On sait en effet que d'une manière générale le couplage écarte les fréquences propres [5], donc tout couplage provoquera au minimum une certaine marche diurne . Malheureusement on n'est pas toujours capable d'écrire les termes de couplage, et des modes non couplés sur un schéma géométriquement parfait peuvent l'être avec les imperfections de réalisation . C'est justement la cause majeure des difficultés que l'on rencontre dans la mise au point des gyromètres vibrants .

3,42 - On peut déjà affirmer que les différents mouvements propres de même type d'un système à constantes réparties ne sont pas couplés, par exemple les différents partiels d'une barre en vibrations longitudinales avec extrémités libres [5]. Cela est rigoureux découlant de la propriété d'orthogonalité des fonctions propres. Par contre, différents types de vibrations d'un même ressort, comme flexion-torsion, donnent souvent lieu à des couplages . La solution bien connue est dans l'augmentation sélective des différents moments d'inertie de la section droite du ressort .

La section circulaire particulièrement doit être utilisée avec prudence en flexion . L'anisotropie de la matière conduit en effet à une variation du moment d'inertie réel de la section, en fonction de l'orientation du diamètre De nombreux expérimentateurs, dont BOUASSE [10] ont signalé qu'il peut apparaître des battements entre les fréquences propres correspondant aux diamètres principaux . Dans nos propres expériences, sur une barre d'aluminium de longueur 2m et de Ø 100, vibrant transversalement dans l'air à 130 Hz, nous avons constaté que le plan de la vibration tournait avec une période de plusieurs minutes. Le phénomène a disparu par suite de l'emballement qui s'est produit dans une expérience d'autoexcitation ; la limite élastique a été dépassée pour un plan de vibration particulier, et la surtension est tombée de 5.10^5 à 2.10^5.

L'existence de modes fortement couplés avec Ω sur un oscillateur donné apparaît la plupart du temps à la seule observation du système, et l'étude théorique que nous pourrions en faire ne conduirait à rien de plus que les résultats annoncés dans tous les ouvrages de dynamique des vibrations . Nous n'insisterons donc pas davantage sur ce problème .

3,430 - Si l'on peut généralement écarter beaucoup les fréquences des divers modes de vibration pour en réduire le couplage, nous allons voir dans quelles conditions on peut éviter les conséquences néfastes des vibrations imposées au support sur le système à deux degrés de liberté déjà représenté figure III,1 .

3,431 - Soit donc $u = f(t)$ un déplacement imposé au support suivant l'axe supportant x et y ; avec les mêmes notations que précédemment, la force vive devient :

$$M_1(u' + x')^2 + M_2(u' + y')^2$$

L'énergie potentielle n'est pas changée ; les équations de Lagrange relatives aux deux degrés de liberté x et y deviennent :

$$\begin{cases} x'' + \omega_1^2 x = \dfrac{K}{K + k_1} \omega_1^2 y - u'' \\ y'' + \omega_2^2 y = \dfrac{K}{K + k_2} \omega_2^2 x - u'' \end{cases}$$

Soit $\lambda_1 = \dfrac{K}{K + k_1}$ et $\lambda_2 = \dfrac{K}{K + k_2}$ $\lambda^2 = \lambda_1 \lambda_2$

$$\begin{cases} x'' + \omega_1^2 x = \lambda_1 \omega_1^2 y - u'' & (6) \\ y'' + \omega_2^2 y = \lambda_2 \omega_2^2 x - u'' & (7) \end{cases}$$

Tirons x de l'équation (7) et portons-le dans (6).

$$y'''' + (\omega_1^2 + \omega_2^2)y'' + \omega_1^2 \omega_2^2 (1 - \lambda^2)y = - u'''' - (\lambda_2 \omega_2^2 + \omega_1^2)u'' \quad (8)$$

On aurait de même :

$$x'''' + (\omega_1^2 + \omega_2^2)x'' + \omega_1^2 \omega_2^2 (1 - \lambda^2)x = - u'''' - (\lambda_1 \omega_1^2 + \omega_2^2)u'' \quad (9)$$

3,432 - Les seconds membres sont des termes connus. Supposons que les différences entre λ_1 et λ_2 soient très faibles devant les différences entre M_1 et M_2 . Cette hypothèse est justifiée étant donné que les ressorts

de suspension sont tirés du même fil, alors que les masses sont usinées et présentent des dissymétries dues à l'ajustement de fréquence du diapason . Nous prendrons donc : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

et : $\omega_1^2 = \omega'^2(1 + \varepsilon)$ (10)

$\omega_2^2 = \omega'^2(1 - \varepsilon)$ (11)

Par ailleurs : $\lambda = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$, très voisin de 1 dans les conditions habituelles .

Les deux racines des équations (8) et (9) sans second membre déjà calculées au paragraphe 3,14 s'écrivent donc :

$$\left|\begin{array}{l} \Omega_s^2 = \omega'^2(1 - \lambda) \\ \Omega^2 = \omega'^2(1 + \lambda) \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left|\begin{array}{l} \Omega_s^2 = \omega'^2 \cdot \frac{2}{n^2} \\ \Omega^2 = 2\,\omega'^2(1 - \frac{1}{n^2}) \end{array}\right.$$

3,433 - Soit $x = A \cos \Omega_s t$. En portant cette valeur dans (6) il vient :

$$A(1 - \frac{\Omega_s^2}{\omega_1^2}) \cos \Omega_s t = \lambda y$$

En négligeant $(\varepsilon - \lambda\varepsilon)$ devant λ , on obtient : $y = A \cos \Omega_s t$
D'où la première solution particulière classique.

$$\begin{cases} x = A \cos \Omega_s t \\ y = A \cos \Omega_s t \end{cases}$$

Soit maintenant $x = B \cos (\Omega t + \varphi)$; il vient de la même façon :

$$y = -B (1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda}) \cos (\Omega t + \varphi)$$

D'où la deuxième solution particuliète correspondant au fonctionnement en diapason :

$$\begin{cases} x = B \cos (\Omega t + \varphi) \\ y = -B (1 - 2\varepsilon) \text{ cps } (\Omega t + \varphi) \end{cases}$$

et la solution générale :

$$\begin{cases} x = A \cos \Omega_s t + B \cos (\Omega t + \varphi) \\ y = A \cos \Omega_s t - B (1 - 2\varepsilon) \cos (\Omega t + \varphi) \end{cases} \qquad (12)$$

Il est clair qu'un circuit d'entretien sensible à (x - y) n'entretiendra que la pulsation en Ω malgré la dissymétrie des masses, résultat tout à fait essentiel qui montre bien l'intérêt de la conception préconisée .

3,434 - Solution particulière due au second membre .

Avec les hypothèses du paragraphe 3,432, les seconds membres des équations (8) et (9) s'écrivent :

$$\begin{cases} - u'''' - \left[\lambda \omega'^2 (1 - \varepsilon) + \omega'^2 (1 + \varepsilon)\right] u'' \\ - u'''' - \left[\lambda \omega'^2 (1 + \varepsilon) + \omega'^2 (1 - \varepsilon)\right] u'' \end{cases}$$

ou $(- u'''' - \Omega^2 u'')$ pour les deux termes . Donc x et y admettent la même solution particulière, avec même amplitude, et cela quelle que soit la forme de la fonction $u = f(t)$.

Soit $g(t)$ la solution particulière due à $f(t)$; la solution générale devient :

$$\begin{cases} x = A \cos \Omega_s t + B \cos (\Omega t + \varphi) + g(t) \\ y = A \cos \Omega_s t - B (1 - 2\varepsilon) \cos (\Omega t + \varphi) + g(t) \end{cases} \qquad (13)$$

I | Le mouvement en x-y est encore une fonction de Ω seul . Il n'est donc absolument pas perturbé par $f(t)$, que le mouvement imposé corresponde à une vibration ou à un choc .Ce résultat est très intéressant : il montre qu'il suffit, en première approximation, que $k_1 = k_2$ pour que l'on puisse recueillir parfaitement filtrée la fréquence du diapason .

3,450 - Cas d'une perturbation sinusoïdale .

Soit $u = u_o \cos \omega t$

$$- u'''' - \Omega^2 u'' = \omega^2 (\Omega^2 - \omega^2) u_o \cos \omega t$$

La solution particulière est de la forme : C cos ωt puisqu'il n'y a pas de terme en x' et y' ni en x"' et y"" . En utilisant les formules (10) et (11) l'équation (9) devient :

$$x'''' + 2\omega'^2 x'' + \omega'^4(1-\lambda^2)x = -u'''' - \Omega^2 u''$$

d'où :

$$C\left[\omega^4 - 2\omega'^2\omega^2 + \omega'^4(1-\lambda^2)\right] = \omega^2(\Omega^2 - \omega^2)\,u_o$$

Or, $\omega'^4(1-\lambda^2) = \Omega^2\Omega_s^2$ et $2\omega'^2 \simeq \Omega^2$

Posons : $\frac{\Omega}{\omega} = m$; il vient :

$$C = \frac{m^2 - 1}{1 - m^2 + \frac{m^4}{n^2}}\,u_o$$

Pour m petit, $C = -u_o$. On vérifie bien que l'isolation passive est assurée .

3,436 - Dans le cas général, on obtient aisément :

$$X = A\sqrt{\lambda_1}\cos\Omega_s t + B_1\cos(\Omega t + \varphi) + \frac{\omega^2\left[\omega'^2(\lambda_2+1) - \omega^2\right]}{\omega^4 - 2\omega'^2\omega^2 + \omega'^4(1-\lambda^2)}\,u_o\cos(\omega t + \psi)$$

$$y = A\sqrt{\lambda_2}\cos\Omega_s t - B_1(1-\varepsilon')\cos(\Omega t + \varphi) + \frac{\omega^2\left[\omega'^2(\lambda_1+1) - \omega^2\right.}{\omega^4 - 2\omega'^2\omega^2 + \omega'^4(1-\lambda^2)}\,u_o\cos(\omega t + \psi)$$

On peut remarquer qu'en l'absence de vibrations extérieures, il existe encore une combinaison linéaire de x et de y qui permet d'éliminer la composante en Ω_s . Il faut disposer de deux capteurs fixes pour x et y et ajuster leur sensibilité par un élément tel qu'une résistance . Cette solution est beaucoup moins élégante que d'imaginer un dispositif permettant d'ajuster k_1 ou k_2 de façon à réaliser l'égalité de λ_1 et λ_2 .

3,437 - Remarques concernant le système d'entretien .

L'étude précédente montre bien l'importance de la conception du circuit d'entretien sur la pureté du signal en Ω. Si l'on peut égaliser les raideurs des fils de suspension, il y a un intérêt évident à réaliser un système direc-

tement sensible à (x-y), (x'-y'), ou (x"-y"), donc relatif et parfaitement directif. La solution par mesure directe de la déformation du ressort de raideur K est en particulier excellente . Nous avons expérimenté cette méthode avec des éléments piézoélectriques, malheureusement les éléments dont nous disposions avaient une surtension propre de 50 et ramenaient par suite un amortissement exagéré sur le diapason . Bien que des capteurs relatifs aient déjà été mis en oeuvre sur des diapasons en U , nous pensons qu'il y a encore beaucoup à chercher de ce côté .

3,44 - Nous conseillons enfin quelques précautions d'ordre général pour les oscillateurs soumis à des vibrations :

a/ Eviter les oscillateurs basse fréquence à constantes réparties, car ils présentent souvent plusieurs partiels dans la gamme d'essai . Il semble prudent de ne mettre en oeuvre que des ressorts surchargés ayant un seul degré de liberté.

b/ Choisir si possible pour $\frac{\Omega}{2\pi}$ une valeur supérieure à la fréquence limite d'essai .

c/ La suspension présente au moins le degré de liberté nécessaire au diapason. Il est facile de se servir de sa raideur dans les autres directions, pour élever la fréquence, voire bloquer les partiels gênants .

d/ Si une vibration parasite ne peut être éliminée mais a cependant peu de chance d'être excitée suivant un ou deux axes perpendiculaires, il suffit de se servir d'un degré de liberté supplémentaire de la suspension pour réaliser "l'isolation passive" du diapason dans la direction gênante .

L'utilisation pratique de ces diverses notions sera faite au chapitre V sur un exemple précis.

Nous avons enfin pleinement conscience que l'on pourrait pousser beaucoup plus loin l'étude de ces perturbations . Il nous semble cependant que c'est chose vaine tant que l'on ignorera le défaut d'isochronisme intrinsèque de chaque type de diapason, et tant que leurs circuits d'entretien seront aussi imparfaits .

En conclusion de ce chapitre, nous insisterons encore sur l'importance qu'il y a de faire travailler le diapason très au-dessous du seuil d'apparition des non liéarités gênantes, ce seuil risquant fort d'être approché sous l'effet des perturbations .

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE III

[1] - A. BERTRAND : auteur déjà cité au chapitre I .

[2] - J.P. BUCHANAN : Handbook of piezoelectric crystals for radio equipement designers . 1954 (U.S. Department of commerce, Office of Technical Services Washington). Nous avons particulièrement étudié dans cet ouvrage les différentes méthodes de fixation des quartz pp 52 à 66 .

[3] - G.W. VAN SANTEN : Introduction à une étude des vibrations mécaniques Bibliothèque Technique PHILIPS 1957 (Dunod). Chapitre VII p 85-86

[4] - BOUASSE : Pendule Spiral Diapason . Tome 2, p. 135 (Delagrave, Paris 1920)

[5] - Y. ROCARD : Dynamique générale des vibrations (Masson et Cie 1949) Chapitres VIII et XI .

[6] - K. FEARNSIDE : "The mathematical theory of vibratory angular tachometers" - Proceedings of the Institution of Electrical Engineers (Part C, 105)

[7] - R.E. BARNABY , J.B. CHATTERTON, F.H. GERRING : "General Theory and operational characteristics of the Gyrotron Angular Rate Tachometer" - Aeronautical Engineering Review - novembre 1953

[8] - C.T. MORROW : "Zero Signals in the Sperry Tuning Fork Gyrotron". The Journal of the Acoustical Society of America.

[9] - G.C. NEWTON Jr : "Theory and Practice in Vibratory Rate Gyros" - Control Engineering

[10] - BOUASSE : "Verges et Plaques, Cloches et Carillons" (Delgrave 1927) p.90 et "Gyroscopes et Projectiles" p. 196 .

CHAPITRE IV

L'AMORTISSEMENT DES DIAPASONS

4,0 - Nous avons recherché jusqu'ici des diapasons mécaniquement et élastiquement parfaits . Si ces deux qualités entraînent déjà une réduction d'amortissement par rapport aux diapasons primitifs, elles sont loin d'être suffisantes pour atteindre une bonne surtension . Le sujet est très vaste : pour l'aborder, nous classerons les causes d'amortissement en causes d'origine interne et externe . Si les causes d'origine interne se retrouvent à des degrés divers pour tous les métaux, elles dépendent beaucoup des conditions de travail, en particulier de la température . Par ailleurs, certaines sources de pertes sont propres à une structure cristalline particulière . Etant donné que les diapasons sont presqu'exclusivement réalisés en alliages fer-nickel et fonctionnent au voisinage de la température ambiante, nous nous limiterons au cas de l'élinvar utilisé dans ces conditions . Cet alliage possède la structure cristalline austénitique du fer γ, du type cubique à faces centrées [1] .

Dans les causes de frottement interne, on distingue la relaxation et l'hystérésis ; les deux peuvent apparaître simultanément .

Nous ne pourrons citer la centaine d'articles consultés sur le sujet ; leur valeur est d'ailleurs très inégale . Pour la rédaction de ce chapitre, nous nous sommes inspirés de l'ouvrage de base de ZENER [2] , pionnier des études théoriques sur la relaxation,et des comptes-rendus d'un colloque tenu en 1960 sur le frottement intérieur des métaux . L'exposé de synthèse de Monsieur FAST est de loin le meilleur que nous ayons rencontré . Nous devons enfin aux ingénieurs de la Société Métallurgique d'Imphy les précisions concernant l'élinvar .

Les notations variant suivant les auteurs, précisons que nous utiliserons δ pour désigner le décrément logarithmique avec $Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{1}{d}$

Dans ZENER, on trouve : $Q = \frac{\pi}{d} = \left(\operatorname{tg} \delta\right)^{-1}$

4,1 - Le frottement interne dans les diapasons en élinvar .

4,11 - Pertes par relaxation .

4,110 - Si l'on applique à un échantillon une charge sous forme de crêneau, sa déformation ε a l'allure montrée figure IV, 1 . On dit qu'il y a "relaxation" . Ce phénomène peut avoir de multiples causes : nous ne citerons que celles qui concernent notre application . La caractéristique de la

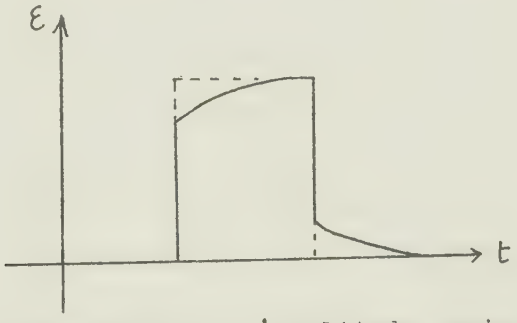


Fig IV, 1

relaxation est d'être indépendante de l'amplitude, mais fonction de la fréquence $\omega/2\pi$. La perte d'énergie correspondante est proportionnelle au déphasage entre la contrainte η et la déformation ε , appelé "angle de perte" d . Lorsque l'amortissement est faible, $\operatorname{tg} d = Q^{-1}$. Dans les cas simples la relaxation, exponentielle pure, est caractérisée par le temps de relaxation unique τ . Soit M_r le module élastique relaxé, et soit M_i le module élastique instantané; on a :

$$Q^{-1} = \frac{M_i - M_r}{(M_i M_r)^{1/2}} \cdot \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \qquad (1)$$

Q^{-1} est maximum pour $\omega\tau = 1$.

Pour $\omega\tau \gg 1$

$$Q^{-1} = \frac{M_i - M_r}{(M_i M_r)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\omega\tau} \qquad (2)$$

Pour $\omega\tau \ll 1$

$$Q^{-1} = \frac{M_i - M_r}{(M_i M_r)^{1/2}} \cdot \omega\tau \qquad (3)$$

La figure IV,2 tirée de [2] montre comment varient le module et le frottement interne avec la fréquence .

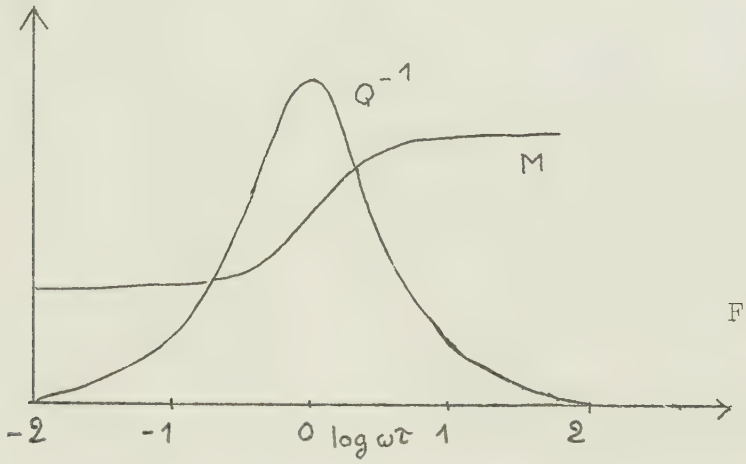


Fig IV, 2

4,111 - Relaxation par diffusion thermique .

Soit une lame en vibrations transversales . On sait que la contrainte produite implique un changement de volume ; par suite, les fibres qui s'étirent se refroidissent et celles qui se compriment s'échauffent . Ces variations de température se relaxent par conductibilité thermique à l'intérieur de l'éprouvette et même par échange avec le milieu ambiant ; le coefficient de dilatation linéaire α du matériau n'étant pas nul, il se produit à retardement des variations de longueur des fibres, et la déformation est en retard sur la contrainte . Ce déphasage est nul aux fréquences élevées où le phénomène devient adiabatique . Il l'est également aux fréquences basses qui conduisent à une déformation isotherme .

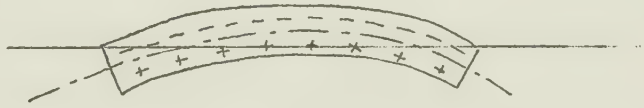


Fig IV, 3

Le cycle effort-déformation a l'allure représentée figure IV,4. L'aire du cycle représente la perte d'énergie par période .

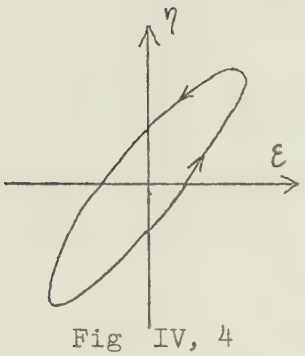


Fig IV, 4

Cet amortissement se produit chaque fois que la contrainte n'est pas homogène et qu'il y a changement de volume . Il n'existe pas en torsion pure . En vibrations longitudinales, la distance de diffusion est beaucoup plus grande qu'en vibrations transversales, et l'amortissement est faible .

ZENER donne les temps de relaxation caractéristiques suivants dans le cas des vibrations transversales :

- pour un barreau d'épaisseur e : $\tau = 0{,}1\ e^2 D^{-1}$
- pour une barre de diamètre Φ : $\tau = 0{,}074\ \Phi^2 D^{-1}$ (4)

Les fréquences correspondant au maximum de frottement interne sont donc :

- pour le barreau d'épaisseur e : $f = 1{,}6\ D\ e^{-2}$
- pour la barre de diamètre Φ : $f = 2{,}16\ D\ \Phi^{-2}$ (5)

Dans ces formules, D est le <u>coefficient de diffusion thermique</u>, rapport de la conductivité thermique σ à la chaleur spécifique par unité de volume $C_v = C\delta$.

Le coefficient $\dfrac{M_i - M_r}{(M_i M_r)^{1/2}}$ s'écrit Δ_E et s'appelle <u>coefficient de relaxation thermique</u> . Il vaut, toujours selon ZENER :

$$\boxed{\Delta_E = M_i\ T\ \alpha^2\ C_v^{-1}} \qquad (6)$$

T étant la température absolue.

Pour l'élinvar, on a :

α = 6 à 8 . 10^{-6} ; nous prendrons la valeur moyenne 7 . 10^{-6}
M_i = 17 000 à 18 000 Kg/mm^2 ; nous prendrons 18 . 10^{11} CGS
C = 0,11 calorie-gramme degré , soit 0,11 . 4,18 . 10^7 CGS
δ = 8,15 CGS
σ = 0,017 . 4,18 . 10^7 CGS à 20°
D = 1,9 . 10^{-2} cm^2/s

Le maximum de Q^{-1} étant $0{,}5\ \Delta_E$, nous trouvons tous calculs faits

$$Q^{-1}_{max} = 3{,}5 \cdot 10^{-4}$$

Nous avons cherché à vérifier cette valeur sur un échantillon constitué par une lame d'élinvar d'épaisseur 0,3 mm et largeur 23 , vibrant transversalement sur son premier partiel avec extrémités libres . L'expérience a été faite dans le vide pour éviter le frottement visqueux et les pertes par diffusion thermique à travers les surfaces de discontinuité de l'éprouvette . Les fils de suspension étaient en bronze phosphoreux de Ø 0,2 . Le capteur était constitué par un bilame piézoélectrique collé le long d'un fil ; on sait en effet que les noeuds ne sont pas rigoureusement immobiles, et vu la sensibilité du capteur, le signal était de plusieurs millivolts . La mise en vibration se faisait par un excitateur à condensateur ;

. L'expérience a été faite pour plusieurs longueurs de lames de façon à tracer le spectre de relaxation thermique . La courbe obtenue est montrée figure IV, 5 . Ce résultat est tout à fait remarquable : l'amortissement maximal est de $4{,}6 \cdot 10^{-4}$, valeur peu supérieure à celle calculée . La différence vient des autres sources de relaxation dont nous allons parler . La position du maximum correspond à la valeur calculée d'après (5) : 34 Hz .

Les courbes de la figure IV, 6 donnent la fréquence correspondant au Q^{-1}_{max} pour une lame en vibration transversale en fonction de son épaisseur et pour diverses valeurs du coefficient de diffusion thermique exprimé en cm^2/s.

On peut aussi calculer les valeurs asymptotiques de Q^{-1} :

pour $\omega\tau \gg 1$ $\qquad Q^{-1} \cdot 10^4 = 0{,}2\ e^2\ f^{-1}$

$\omega\tau \ll 1$ $\qquad Q^{-1} \cdot 10^4 = 2{,}3 \cdot 10^2\ e^2\ f$

Toutefois, ces valeurs ne pourront certainement pas être atteintes car on rencontrera avant d'autres pics de frottement interne .

Lors de la construction d'un oscillateur en élinvar comportant une lame de flexion, il faut donc prendre garde de choisir une fréquence très différente de $1{,}6\ D\ e^2$. Pour bien faire, il faudrait s'en écarter environ 100 fois . La surtension dépasse alors 10^4 .

On voit d'après les courbes de figure IV, 6 qu'il est très difficile de faire travailler des lames au-dessous du pic de frottement interne : pour les applications horlogères, on est presque toujours amené à prendre

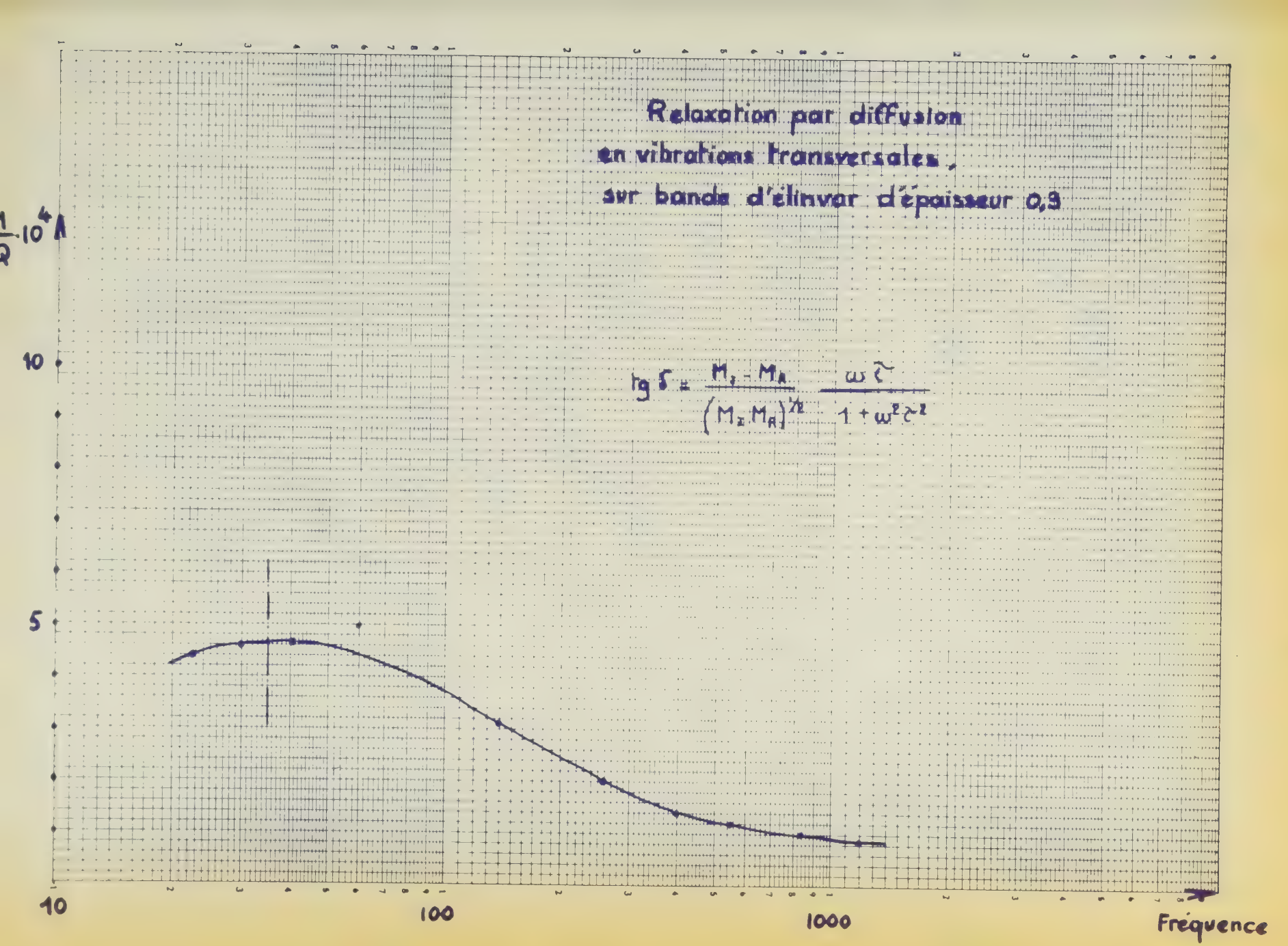

Relaxation par diffusion
en vibrations transversales,
sur bande d'élinvar d'épaisseur 0,3
$\lg \delta = \frac{M_1 - M_R}{(M_1 M_R)^{1/2}} \frac{\omega\tilde{\tau}}{1+\omega^2\tilde{\tau}^2}$
$\frac{1}{Q} \cdot 10^4$
10
5
10
100
1000
Fréquence

Fig IV ,5

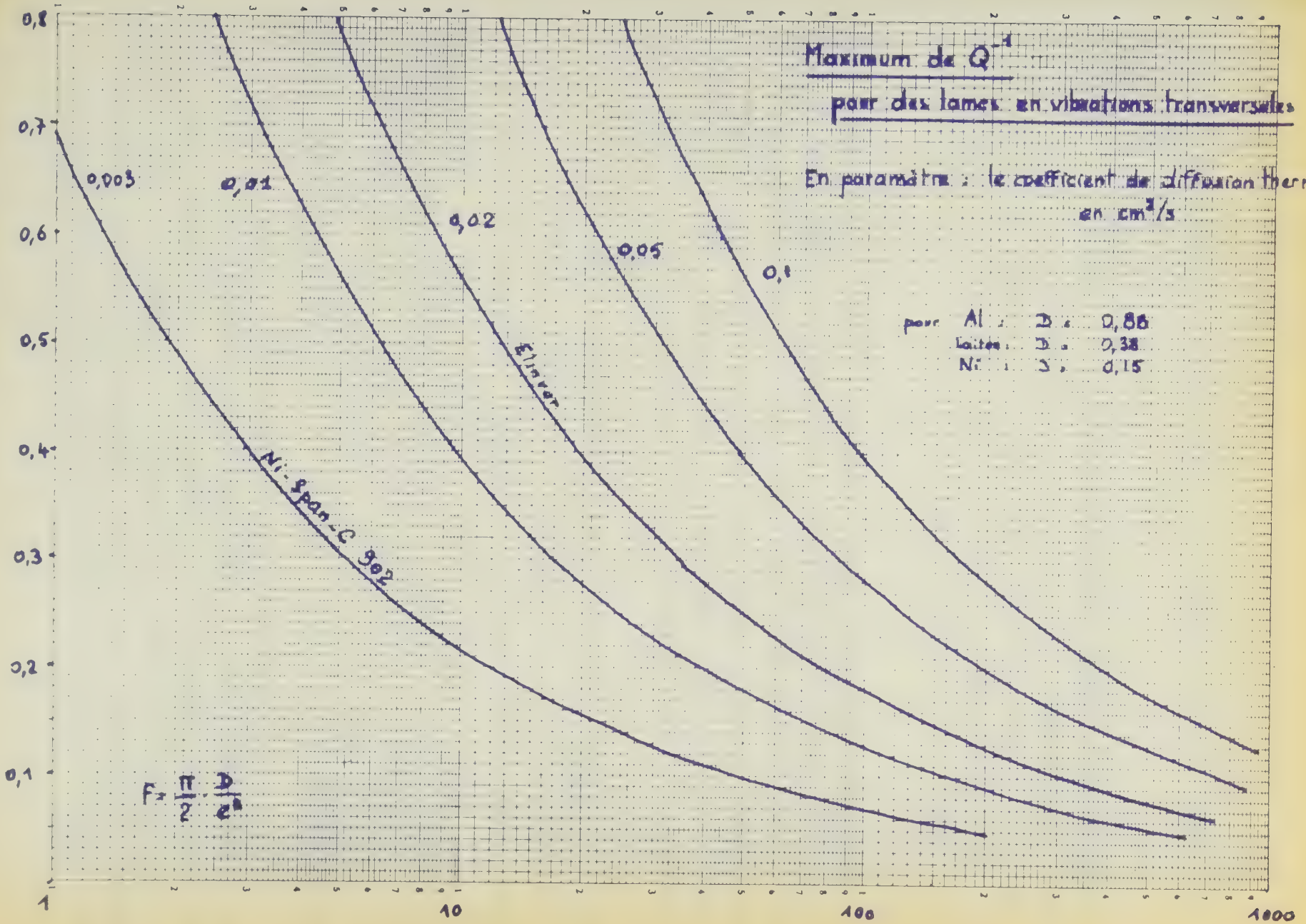

Maximum de Q^{-1}
pour des lames en vibrations transversales
En paramètre : le coefficient de diffusion thermique D en cm²/s
pour Al : D = 0,86
Laiton : D = 0,38
Ni : D = 0,15
0,003
0,01
0,02
0,05
0,1
Elinvar
Ni-Span-C 902
$F = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{D}{e^2}$
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
1
10
100
1000
Fréquence

Fig IV,6

des lames épaisses et surchargées, ce qui est également préférable pour d'autres raisons .

4,112 - Relaxation par diffusion thermique intergranulaire .

Le phénomène que nous venons de voir à l'échelle macroscopique se retrouve également à l'échelle des grains entre lesquels il y a donc diffusion . Si a est le diamètre moyen des grains, l'amortissement est maximum pour $f = D\,a^{-2}$. Pour les fréquences élevées :

$$Q^{-1} = \left(\frac{D}{2\omega}\right)^{1/2} a^{-1}$$

Pratiquement, tous les chercheurs ont remarqué l'intérêt d'augmenter le diamètre des grains . Nous n'avons pu obtenir des renseignements quant à leur dimension dans l'élinvar ; il serait possible de faire grossir d'autant plus les grains que l'écrouissage serait faible au départ . Malheureusement, le traitement thermique nécessaire (chauffage à 1150°) peut être incompatible avec l'obtention d'un coefficient thermoélastique faible et d'une limite élastique élevée .

4,113 - Relaxation par diffusion thermique avec le milieu ambiant

ZENER montre que l'amortissement est encore proportionnel à $\left(\frac{D}{2\omega}\right)^{1/2}$ et au rapport $\frac{\text{aire}}{\text{volume}}$. Il y a d'ailleurs une autre raison de réduire ce rapport : en effet, la surface de la pièce est constituée par une couche désorganisée dans laquelle le frottement est intense . On peut utiliser la même technique que pour les quartz et enlever cette couche par une attaque à l'acide . Son épaisseur est de l'ordre de 0,5 μ . Enfin la diminution du rapport aire/volume va dans le sens d'une réduction du frottement visqueux.

4,114 - Causes secondaires de relaxation .

La viscosité des joints de grain est citée comme cause de frottement interne . Nous n'avons pu obtenir de renseignements particuliers dans le cas de l'élinvar ; il est probable que l'amortissement résultant est très faible à la température ambiante . De même il est probable qu'à l'ambiante la déformation entraîne peu de regroupement des atomes de carbone en solution.

Enfin, la concentration des paires d'atomes étrangers susceptibles de se réorienter serait faible ; ce sont essentiellement des carbures . Nous n'avons pu avoir davantage d'informations concernant le mouvement des dislocations ; des essais d'irradiation aux rayons gamma pourraient être entrepris pour éclaircir cette question à la suite des expériences de GRANATO, LUCKE et STERN . [3] [4]

4,12 - Pertes par hystérésis .

4,121 - L'hystérésis est caractérisée par la réponse montrée figure IV, 7 à une excitation en forme de crêneau . La perte d'énergie dépend cette fois de l'amplitude mais non de la fréquence . On sait par exemple que l'arrachement d'un segment de dislocation de ses atomes d'impureté provoque de l'hystérésis ; cela ne doit pas se produire si l'on ne dépasse pas la limite élastique . Nous avons fait des essais de traction et de cyclage sur l'élinvar en bande d'épaisseur 0,3 . Les courbes de la figure IV, 8 montrent qu'à 50 kg/mm^2 on a nettement dépassé la limite élastique . Sur pièce massive, cette limite est de l'ordre de 32 kg/mm^2 . Pour être certain de ne pas voir apparaître de fatigue sous contrainte dynamique, donc s'assurer une bonne stabilité à long terme, il est sage de ne pas dépasser 5 kg/mm^2 . Si l'on considère les contraintes accidentelles qui peuvent se produire sous l'effet des chocs, ce taux de travail semble même assez élevé . Le cas des spiraux qui travaillent à 40 kg/mm^2 est très différent, car il s'agit d'un alliage à 42 % de nickel fortement écroui ; d'ailleurs leur frottement interne est élevé .

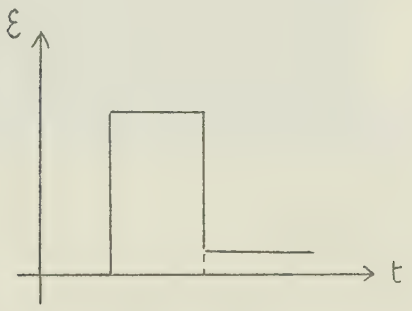


Fig IV, 7

4,122 - Comme dans tout matériau magnétostrictif,* l'élinvar présente une hystérésis due au mouvement des parois de Bloch . Ce phénomène est bien connu ; pour le réduire, il faut travailler à très faible contrainte ou superposer un champ magnétique qui empêche tout déplacement de parois . Cette dernière solution est impraticable dans notre application .

---

* coefficient de magnétostriction : + 9.10^6
Point de Curie 150°

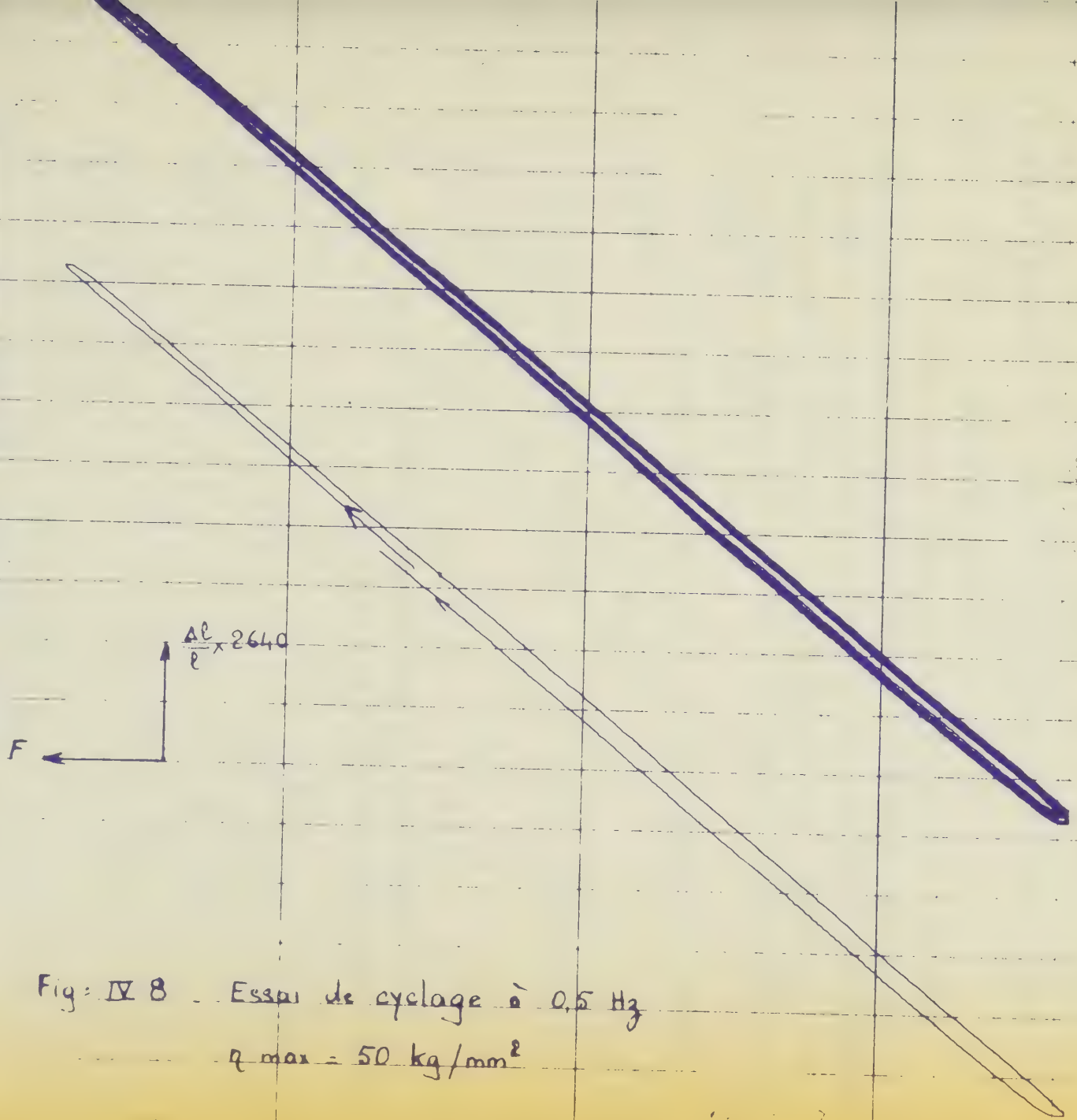


Fig : IV 8 - Essai de cyclage à 0,5 Hz

σ max = 50 kg/mm²

Otto Wolpert-Werke G.m.b.H. Prüfmaschinen und Apparatebau Ludwigshafen am Rhein

4,2 - Les causes extérieures d'amortissement .

4,20 - Les causes extérieures d'amortissement des diapasons sont principalement dues au rayonnement, aux fuites d'énergie par les organes de suspension, et à l'amortissement ramené par le système d'entretien .

4,21 - Pertes par rayonnement .

Le remède radical consiste évidemment à placer l'oscillateur dans le vide, chose d'autant plus facile qu'il est petit . En tout cas, on peut prévoir assez exactement l'allure de la variation de cet amortissement lorsqu'on modifie, à fréquence égale les dimensions de l'oscillateur. Nous le montrerons dans le cas simple d'une verge encastrée en vibrations transversales sur son premier partiel .

La résistance de rayonnement par unité de longueur est donnée par ROCARD :

$$f' = \rho c 4\pi^5 r^4 \lambda^{-3} \qquad (7)$$

r est le rayon de la section droite

c la célérité du milieu

ρ sa masse spécifique

λ la longueur d'onde de la vibration $= cf^{-1} = c\, 2\pi\, \omega^{-1}$

La force résistante correspondante est proportionnelle à la vitesse $y'(x,t)$. Soit $Y(t)$ l'amplitude de l'extrémité de la verge : on sait que :

$$y' = \frac{3\,Y'}{L^3}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

La force sur un élément de fil est $dF = f'y'dx$, d'où pour toute la verge :

$$F = f' \frac{3\,Y'}{L^3}\int_0^L \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) dx = \frac{3}{8} f'Y'L$$

Le travail élémentaire de cette force est : $dW = \frac{3}{8} f' L Y'^2 dt$

Or $Y = Y_o \sin \omega t$

Pour une période la perte d'énergie est :

$$\Delta W = \frac{3}{8} f' L Y_o^2 \omega^2 \int_0^T \cos^2 \omega t \, . \, dt$$

d'où :

$$\Delta W = \frac{3}{8} f' L Y_o^2 \omega \pi \qquad (8)$$

Or l'énergie de déformation du fil est : $W = \frac{3\,EI}{2\,L^3}\,Y_o^2$

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\pi f' \omega L^4}{4\,EI} \qquad (9)$$

Le terme $\frac{EI}{L^3}$ s'exprime en fonction de ω:

On sait en effet que $\omega^2 = \frac{140\,EI}{11\,m\,L^3}$, d'où : $\frac{\Delta W}{W} = \frac{35\,\pi}{11}\,\frac{f'L}{m\omega}$ (10)

f' s'exprime en fonction de ω par : $f' = \frac{\pi^2 \rho}{2\,c^2}\,r^4\omega^3$. Portons cette valeur dans (10) ; il vient :

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{17{,}5\,\pi^3 \rho\, r^4 \omega^2 L}{11\,c^2\,m}$$

Or, $m = \pi r^2 L \delta$.

d'où finalement :

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{17{,}5\,\pi^2}{11}\,\frac{\rho}{\delta\,c^2}\,r^2\omega^2 = 2\,\pi\,Q^{-1} \qquad (11)$$

On s'aperçoit qu'à fréquence constante l'amortissement par rayonnement augmente beaucoup avec les dimensions de l'oscillateur .

Dans l'air, avec $\rho = 1{,}293 \cdot 10^{-3}$ g/cm^3

$c = 3{,}4 \cdot 10^4$ cm/s

et pour un élinvar de masse spécifique 8,15 .g/cm^3, on trouve :

$$Q^{-1} = 1{,}4 \cdot 10^{-11}\,r^2 f^2 \qquad (12)$$

On voit que pour les petits oscillateurs cette source d'amortissement est parfaitement négligeable . Par contre si l'on utilise des lames et non plus des fils, la résistance de rayonnement augmente énormément [8] [9]. Il est donc clair qu'il y a un compromis à réaliser entre la réduction de hauteur de lame demandée pour réduire le rayonnement et l'augmentation souvent souhaitable pour éviter les vibrations de torsion . Il faut également, comme déjà mentionné, que le rapport surface/volume ne se détériore pas trop . Enfin il ne faut pas perdre de vue que ces calculs ne sont valables que dans la mesure où le suppprt de l'oscillateur ne rayonne pas lui-même, car ses dimensions transversales ne sont plus du tout négligeables devant la longueur d'onde . La mise en oeuvre d'un diapason bien suspendu permet d'éliminer ce rayonnement par le support .

4.22 - Pertes dans les organes de suspension .

4.221 Reprenons encore le schéma d'un diapason suspendu symétrique, et introduisons un terme d'amortissement dans la suspension. (Fig. IV,9)

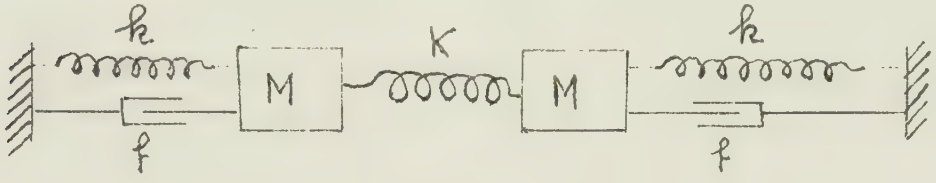


Fig IV9

Utilisons les mêmes notations qu'au chapître III :
Soit Q_s la surtension mesurée de la perturbation Ω_s, le mouvement en $u = y - x$ étant bloqué : l'équation du mouvement s'écrit :

$$x'' + \frac{f}{M} x' + \Omega_s^2 x = 0$$

Or $\frac{f}{M} = \frac{\Omega s}{Q_s}$ d'où $x'' + \Omega_s Q_s^{-1} x' + \Omega_s^2 x = 0$ (14)

Examinons l'influence de Q_s^{-1} sur Q^{-1} amortissement de la pulsation Ω :

$$\begin{cases} x'' + \frac{f}{M} x' + \omega'^2 x = \lambda \omega'^2 y \\ y'' + \frac{f}{M} y' + \omega'^2 y = \lambda \omega'^2 x \end{cases}$$

soit par différence $u'' + \frac{f}{M} u' + \omega'^2 u = -\lambda \omega'^2 u$

ou $u'' + \frac{f}{M} u' + (1 + \lambda) \omega'^2 u = 0$

En tenant compte de (13) et en remarquant que $(1 + \lambda) \omega'^2 = \Omega^2$

$$u'' + \Omega_s Q_s^{-1} u' + \Omega^2 u = 0 \qquad (15)$$

Soit Q'^{-1} l'amortissement ramené sur le mouvement en u :

$$\Omega_s Q_s^{-1} = \Omega Q'^{-1}$$

d'où $\boxed{Q' = n Q_s}$ (16)

On voit que l'amortissement ramené par la suspension sur le fonctionnement en diapason est très faible, mais non négligeable. Il s'ajoute à l'amortissement dû au ressort K que nous avons précédemment étudié.

4.222 Utilisation de la fréquence propre des ressorts.

Les ressorts k ont une masse répartie et une fréquence propre Ω_r, correspondant au fonctionnement en quart d'onde avec noeud sur le bâti et ventre sur le diapason. On accorde Ω_r sur Ω dans certains montages de quartz, pour réduire la perte d'énergie. Soit W' et A' l'énergie et le coéfficient d'inertie des ressorts de suspension, W et A se rapportant au diapason. Dans le cas le plus défavorable où l'amplitude des ressorts k est égale à celle du ressort K, on a :

$$\frac{\Delta W'}{\Delta W} = \frac{A' Q_r^{-1}}{A Q^{-1}}$$

L'ordre de grandeur de ce rapport est 10^{-2}. Bien souvent il est encore multiplié par le rapport des amplitudes, et il n'y a alors pas grand chose à gagner avec ce montage, du moins tant que Q^{-1} restera de l'ordre de 10^{-4}. Le calcul rigoureux présente de l'intérêt dans le cas du modèle qui a servi à nos mesures de frottement interne, afin de connaître l'amortissement limite propre au montage. La lame étudiée et les fils de suspension constituent un système de deux oscillateurs à constantes réparties couplés, le fil ayant un degré de liberté en rotation et au moins un en translation. Le schéma mathématique doit tenir compte d'un spectre à plusieurs temps de relaxation pour ces fils. Ce problème d'un intérêt pratique réel est particulièrement difficile à résoudre avec généralité ; il nécessiterait une autre thèse se basant sur la deuxième approximation d'une verge en vibrations transversales, afin de connaître exactement le mouvement des noeuds.

4.23 - Pertes dues aux éléments capteurs et excitateurs.

Nous ne nous étendrons pas sur ce sujet bien connu [11] . Pour les mesures dans le vide seuls les capteurs et excitateurs à condensateur sont de mise en oeuvre facile et n'introduisent pas d'amortissement. Les réalisations industrielles comportent presque toujours un aimant permanent et il en résulte des pertes par courants de Foucault rarement négligeables.

Les transducteurs piézoélectriques à titanate de Barium dans lesquels nous avons mis beaucoup d'espoir pêchent par un frottement interne élevé de l'ordre de 10^{-2}, à quoi il faut ajouter le frottement dans le joint de ciment conducteur. La haute impédance de ces éléments ne semble pas un

inconvénient majeur ; ils permettent une mesure directe de y - x par collage le long du ressort. Les jauges à filament de silicium présentent le même avantage sous faible impédance, avec des pertes faibles vu leurs très petites dimensions ; malheureusement leur prix est à l'heure actuelle tout à fait rédhibitoire.

Le montage en accéléromètre des bilames piézoélectriques proposé par M. LALLEMENT permet de ramener un amortissement de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-5} au détriment du rendement. [12] .

En conclusion, et par expérience, nous pouvons affirmer que dans un diapason bien conçu c'est avant tout le frottement par relaxation dans l'élinvar qui limite la surtension. Pour certains oscillateurs de flexion, l'amortissement par rayonnement et frottement visqueux peut devenir la partie principale. Si le frottement interne pouvait être abaissé à 10^{-5}, le montage sous vide des petits diapasons serait indispensable.

Il apparaît urgent d'entreprendre une étude complète des spectres de relaxation des alliages fer-nickel utilisés en chronométrie.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE IV

[1] - E. JOSSO : Propriétés des alliages fer-nickel à haute teneur en nickel. (Centre d'information du nickel, 1956)

[2] - C. ZENER : Elasticité et anélasticité des métaux (Dunod 1955). Il est souhaitable de travailler sur l'édition américaine : Elasticity and anélasticity of metals (the University of Chicago Press, 1960) voir également "The Physical Review" 1937 et 1938

[3] - Le frottement intérieur des métaux. Comptes rendus du colloque tenu à Saint-Germain en Laye les 13 et 14 Octobre 1960. (Imprimerie du commerce, St-Germain-en-Laye).

[4] - VITTOZ, SECRETAN, MARTINET : Frottement interne et anélasticité des solides. (Z. Angew. Math. Phys., 1963, tome 14 n°1 page 46 à 69)

[5] - Y. ROCARD : déjà cité, page 38

[6] - J. MANDEL : Vibration des corps viscoélastiques linéaires.(Bulletin de la Société française des mécaniciens, 1961, n°33 page 15 à 23)

[7] - Y. ROCARD : déjà cité page 342

[8] - S. LOWENTHAL et P. TOURNOIS : Impédances de rayonnement de rubans et de plaques. (The journal of the acoustical society of america, septembre 1963) les impédances calculées concernent le fonctionnement en baffle infini.

[9] - DUCUING : Thèse de doctorat, Paris 1960

[10]- J.B. WATCHTMAN and W.E. TEFFT : Effect of suspension position on apparent values of internal friction determined by Forter's method. (The review of scientific instruments, n°6, Juin 1958, P.517). La méthode de Forster nous paraît inutilisable en Chronométrie.

[11]- M. HETZEL : Applications de l'Electricité et de l'Electronique aux montres bracelet.(Horological Journal. Mars à Juillet 1963)

[12]- Y. ROCARD : déjà cité page 107 : méthode rapide de calcul de l'amortissement ramené par un oscillateur sur un autre auquel il est couplé. Cette méthode s'applique bien au cas d'un excitateur monté en accéléromètre.

[13]- F.B. STULEN ; A model for the mechnical properties of metals. (Materials Research & Standards, vol.2 n°2, février 1962). Cet article comporte une abondante bibliographie sur le sujet.

[14]- F. SEITZ : The physics of metals (Mc. Graw-Hill book company, New-York 1943, Chapitre X)

[15]- B. CHALMERS : Métallurgie physique (Dunod 1963, page 177)

[16]- M.R. CABARAT : Le frottement intérieur sous très faibles contraintes (Mém. Soc. Ing. Civ. France 1951, mai-juin p. 167 à 183)

[17]- L.J. DEMER : Bibliography of the material damping field.(Juin 1956 Washington US dept. Commerce) ".. the largest list of references in this field yet collected."

NOTATIONS DU CHAPITRE IV

δ décrément logarithmique des oscillations libres et densité.

Q coefficient de surtension

tg d angle de perte

σ contrainte

ε déformation

M_i Module élastique instantané

M_r Module élastique relaxé

ω pulsation du mouvement

τ temps de relaxation caractéristique

D coefficient de diffusion thermique $= \frac{\sigma}{C_v}$

σ conductivité thermique

C_v chaleur spécifique par unité de volume

α coefficient de dilatation linéaire

Δ_E relaxation thermique

T température absolue

ρ masse spécifique du milieu ambiant

C célérité de ce milieu

f fréquence $= \frac{\omega}{2\pi}$

λ longeur d'onde

Pour les calculs du § 4.221 on se reportera aux notations du chapitre III.

DEUXIEME PARTIE

-:-:-:-

FORMES PARTICULIERES PROPRES AUX DIAPASONS A LAMES MINCES

CHAPITRE V

ETUDE D'UN DIAPASON A LAME MINCE

5.0 Nous avons vu que l'on n'utilisait pratiquement que les alliages fer-nickel du type élinvar pour la fabrication des diapasons intéressant l'industrie ; or ces matériaux sont assez difficiles à travailler, et couteux, utilisant de 36 à 43 % de nickel. Il est donc intéressant de chercher à éliminer tout usinage ; la fabrication par découpage et éventuellement cambrage semble la seule capable de satisfaire aux conditions de précision et de prix de revient.

On remarque que toutes les formes de diapasons rencontrées jusqu'ici se prêtent mal au découpage, car la déformation se produit dans le plan du laminé ; il faut donc découper moins que le carré, et comme on ne peut aller très loin dans cette voie on peut craindre une rigidité insuffisante dans le plan perpendiculaire au plan normal de vibration. Nous avons donc recherché des diapasons dont la déformation se produit perpendiculairement au plan du laminé. La difficulté réside dans la valeur élevée des tolérances normales de laminage : il semble très difficile d'atteindre $\pm$ 0,01 mm. La fréquence étant généralement proportionnelle à l'épaisseur, cela impose un ajustement de fréquence de quelques pourcents. On a donc tout intérêt à prendre des lames épaisses, ce qui va également dans le sens d'une réduction de l'amortissement par diffusion thermique. Pour rester dans des fréquences de l'ordre de 100 Hz avec un faible encombrement, on est alors conduit à surcharger les lames.

5.1 Première recherches

Nous n'avons pas travaillé dans le domaine des diapasons de torsion qui descendent difficilement en basse fréquence sans mettre en oeuvre des ressorts travaillant plus en flexion qu'en torsion, l'intérêt d'une telle solution disparaissant alors en partie.

Nous avons donc porté notre effort d'imagination sur les seuls diapasons à lame de flexion. Nous passerons très rapidement sur les premières formes étudiées qui étaient loin de satisfaire au cahier des charges dressé dans la première partie de ce travail. La figure V.1 reprend une vieille idée : l'étude théorique de ce diapason annulaire a été faite par M. ALTENBURGER : on calcule un point sur chaque branche dont le déplacement est linéaire, ce qui permet de réaliser un entretien électrodynamique. Un entretien par circuit à réluctance variable concentrique a également été étudié , mais la linéarité est difficile à atteindre. La réalisation de ce diapason est délicate ; les problèmes sont proches de ceux posés par le type de la figure 11.15 : l'emboutissage n'est guère pensable, tout comme l'obtention de tubes suffisamment précis.

Le diapason de la figure V.2 est déjà obtenu par découpage : il présente l'avantage d'un frottement visqueux très faible, sauf pour les vibrations parasites perpendiculaires au plan normal de vibration. Les figures V,3 et 4 montrent des études assez proches de la précédente, dans lesquelles les centres de gravité des surcharges se trouvent au repos sur la tangente commune aux trajectoires. L'isolation active est facilement obtenue, mais la sensibilité au choc est très grande. Ces petits diapasons, très faciles à loger dans une montre donnent des surtensions de l'ordre de 2000. L'entretien est encore obtenu électrodynamiquement, les aimants étant du type platine-cobalt et travaillant en circuit ouvert. C'est sur ces diapasons que nous avons également expérimenté l'entretien par bilame céramique collé au voisinage de l'encastrement. L'épaisseur du bilame étant supérieure à celle du diapason, la fréquence était énormément modifiée. Les calculs relatifs à ces diapasons sont tout à fait élémentaires.

5.20 - Forme définitive

Nous avons abouti enfin à une forme qui fait penser aux diapasons en W, et qui tient également des lames vibrantes à entretien magnétique du type Clifford (Fig.V.5). La théorie peut être ici parfaitement respectée, aussi bien en ce qui concerne l'immobilité du centre d'inertie que la fréquence optimale de suspension. C'est un diapason élastiquement parfait, et mécaniquement parfait lorsque des proportions rigoureusement déterminées sont respectées.

Fig. V, 1

Diapason annulaire
taillé dans la masse

Fig. V, 3

Fig. V, 2

Diapason annulaire
découpé et plié

Fig. V, 4

Entretien par bilame

Il est constitué de deux lames déformables OA et OA' planes et opposées. Elles sont chargées à leur extrémité par des lames indéformables AB et A' B', dont le centre de gravité est ramené à une distance déterminée de l'axe de symétrie Oz. L'ensemble peut être fixé par des pattes disposées suivant Oz, ou de façon beaucoup plus satisfaisante par des fils fixés aux noeuds de rotation des surcharges. Les lames AB et A'B' peuvent être prises dans la même bande que OA et OA' et nervurées suivant le pointillé, ou pliées suivant uu' et vv' de telle sorte que leur plan devienne perpendiculaire à celui des lames déformables. Cette dernière disposition réduit le frottement visqueux. La vibration se produit dans le plan Oxy et la figure V.6 montre l'allure de la déformée dynamique. Les déformations sont donc symétriques par rapport au plan yOz. Le point O est noeud d'amplitude.

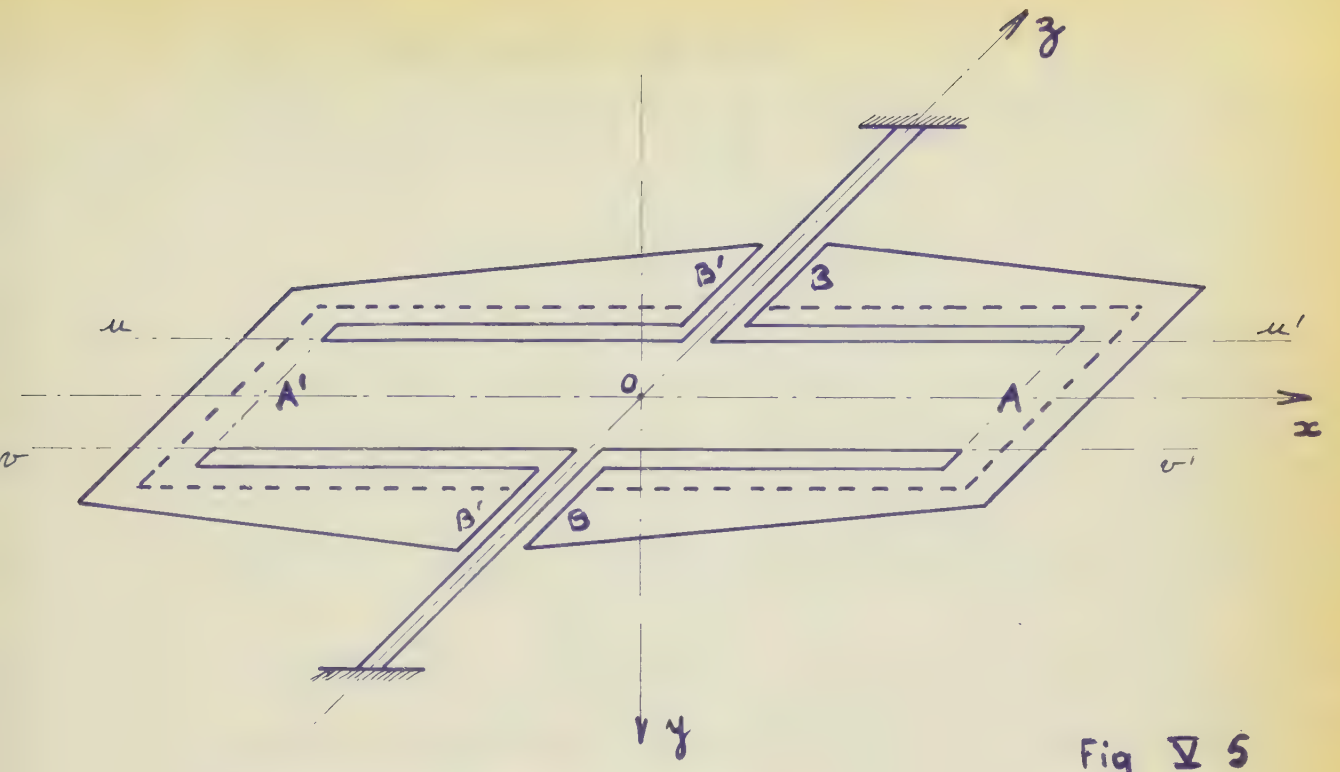


Fig V 5

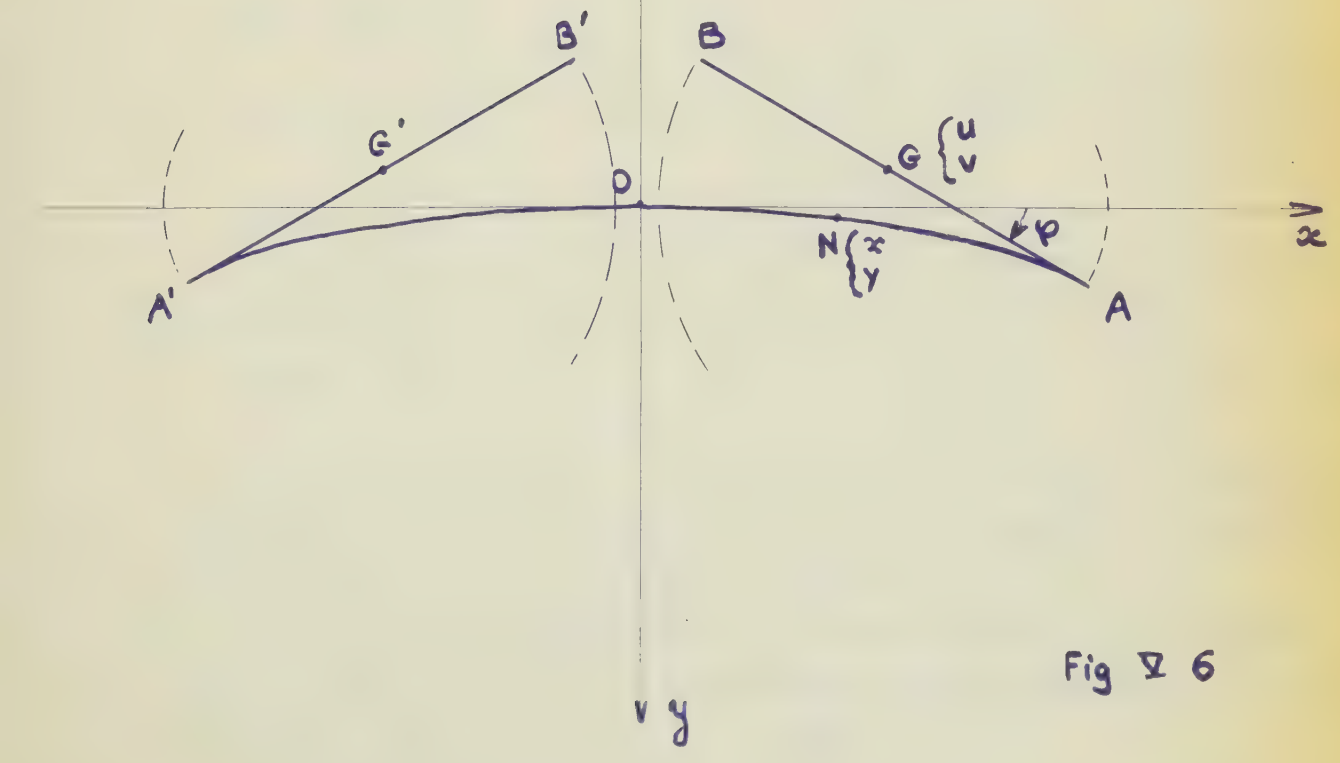


Fig V 6

5,21 - Etude dynamique rigoureuse .

5,210 - L'équation générale des vibrations transversales dans le cas d'une lame homogène à section constante est :

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\delta S \partial^2 y}{E I \partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

Cette équation néglige l'effet de l'inertie de rotation et celui du cisaillement, simplification justifiée chaque fois que l'on a affaire à des lames minces travaillant suivant le premier mode normal ; or, nous cherchons justement des oscillateurs à basse fréquence dans lesquels l'épaisseur de la lame est de l'ordre du centième de la longueur d'onde . L'erreur est alors de l'ordre du millième et l'approximation faite parfaitement justifiée . [1]

Posons : $\alpha^4 = \frac{\delta S}{EI} \omega^2$ et $y = Y(x)\, e^{i\omega t}$ (2)

Nous obtenons une équation différentielle linéaire d'ordre 4 à coefficients constants :

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} + \alpha^4 Y = 0 \qquad (3)$$

de solution générale :

$$Y = A \operatorname{ch} \alpha x + B \operatorname{sh} \alpha x + C \cos \alpha x + D \sin \alpha x$$

Les constantes A, B, C, D sont définies par les conditions aux limites .

5,211 - Etude des conditions aux limites .

Par raison de symétrie, nous avons en O encastrement parfait et nous pouvons limiter notre étude à la seule partie droite du diapason .

Pour $x = C$ $\begin{cases} Y = 0 \\ Y' = 0 \end{cases}$ (4)

En un point N d'abscisse x , nous pouvons écrire l'expression du moment fléchissant et de l'effort tranchant dûs à la surcharge ; en faisant x = L nous aurons deux autres conditions aux limites .

Le moment de la force d'inertie -F appliquée en G par rapport à N vaut : $-(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AG}) \wedge \overrightarrow{F}$. La surcharge présente également une inertie de rotation, d'où le couple : $-J \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

Le moment fléchissant en N s'écrit donc :

$$E\,I\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -(u-x)\,M\,\frac{d^2v}{dt^2} - J\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad (5)$$

Nous en tirons l'expression de l'effort tranchant :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E\,I\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = M\,\frac{d^2v}{dt^2} \qquad (6)$$

Pour $x = L$, les équations (5) et (6) deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\dfrac{M}{E.I}\,(u-L)\,\dfrac{d^2v}{dt^2} - \dfrac{J}{E\,I}\,\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} \\ \dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \dfrac{M}{E\,I}\,\dfrac{d^2v}{dt^2} \end{cases} \qquad (7)$$

φ et v peuvent être explicités; en effet : $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\partial y}{\partial x}_{x=L} = \dfrac{y_{x=L} - v}{L-u}$

d'où : $v = y_{x=L} - \dfrac{\partial y}{\partial x}_{x=L}\,(L-u)$ (8)

En portant ces valeurs dans les équations (7) nous obtenons :

Pour $x = L$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{M}{E\,I}\,(u-L)\left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - (L-u)\,\frac{\partial^3 y}{\partial t^2\,\partial x}\right] - \frac{J}{E\,I}\,\frac{\partial^3 y}{\partial x\,\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{M}{E\,I}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - (L-u)\,\frac{\partial^3 y}{\partial t^2\,\partial x}\right] \qquad (9)$$

Le moment d'inertie de la surcharge J peut être mis sous la forme :

$M\rho^2 = M\,k^2L^2$. Par ailleurs, en posant $\frac{M}{m} = \lambda$, le terme $\frac{M\omega^2}{E\,I}$ peut s'écrire $\frac{M\omega^2}{E\,I} = \lambda\,L\,\alpha^4$ (10)

Introduisons également $\frac{u}{L} = \mu$ et $1 - \mu = \nu$ et séparons les variables :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2Y}{dx^2}\,e^{i\omega t} \qquad \frac{\partial^3 y}{\partial t^2\,\partial x} = -\frac{dY}{dx}\,\omega^2 e^{i\omega t} \qquad (11)$$

Les conditions aux limites pour x=L s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2Y}{dx^2} = \nu\,\lambda\,L^2\alpha^4\,(L\,\nu\,\dfrac{dY}{dx} - Y) + \lambda\,k^2L^3\alpha^4\,\dfrac{dY}{dx} \\ \dfrac{d^3Y}{dx^3} = \lambda\,L\alpha^4\,(L\,\nu\,\dfrac{dY}{dx} - Y) \end{cases} \qquad (12)$$

5,212 - Condition particulière au diapason mécaniquement parfait .

Essayons d'introduire une condition particulière qui détermine un diapason parfait tel que nous l'avons décrit précédemment . On constate qu'il suffit d'écrire que la réaction sur l'encastrement se réduit à chaque instant à une force dirigée suivant Ox et à un couple . Il est clair que cette force et ce couple seront annulés par ceux provenant de la branche symétrique . Nous aurons donc bien un oscillateur à quantité de mouvement et moment cinétique nuls .

Ecrivons donc que la somme des forces d'inertie en projection sur Oy est nulle :

$$\int_0^L - dm\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - M\,\frac{d^2 v}{dt^2} = 0 \qquad (13)$$

avec les mêmes notations que précédemment on obtient :

$$\frac{1}{L}\int_0^L Y\,dx - \lambda\left[L\,\nu\,\frac{dY}{dx} - Y\right]_{x=L} = 0 \qquad (14)$$

Cette équation donne donc une relation entre λ et ν pour que le diapason soit correctement construit . Tirons l'expression de λ.

$$\lambda = \frac{\frac{1}{L}\int_0^L Y\,dx}{\left[L\,\nu\,\frac{dY}{dx} - Y\right]_{x=L}} \qquad (15)$$

On a dès lors à résoudre l'équation (3) compte tenu des conditions (4), (12) et (15) .En introduisant l'équation (15) dans le système (12), il vient :

Pour x=L

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{\int_0^L Y\,dx}{\left(L\,\nu\,\frac{dY}{dx} - Y\right)}\,\alpha^4\left[L\,\nu\,(L\,\nu\,\frac{dY}{dx} - Y) + k^2L^2\,\frac{dY}{dx}\right] \qquad (16)$$

$$\frac{d^3Y}{dx^3} = \alpha^4\int_0^L Y\,dx \qquad (17)$$

5,213 - Détermination des coefficients A, B, C, D.

Introduisons les conditions (4) dans l'équation (3), nous obtenons immédiatement :

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ \alpha (B + D) = 0 \end{cases}$$

d'où : $C = -A \quad , \quad D = -B$

Les trois permières dérivées et l'intégrale de Y sont données par :

$$Y = A \operatorname{ch}\alpha x + B \operatorname{sh}\alpha x - A \cos\alpha x - B \sin\alpha x \tag{18}$$

$$Y' = \alpha(A \operatorname{sh}\alpha x + B \operatorname{ch}\alpha x + A \sin\alpha x - B \cos\alpha x) \tag{19}$$

$$Y'' = \alpha^2 (A \operatorname{ch}\alpha x + B \operatorname{sh}\alpha x + A \cos\alpha x + B \sin\alpha x) \tag{20}$$

$$Y''' = \alpha^3 (A \operatorname{sh}\alpha x + B \operatorname{ch}\alpha x - A \sin\alpha x + B \cos\alpha x) \tag{21}$$

$$\int Y\,dx = \frac{1}{\alpha} (A \operatorname{sh}\alpha x + B \operatorname{ch}\alpha x - A \sin\alpha x + B \cos\alpha x) \tag{22}$$

Les équations (21) et (22) jointes à (17) entraînent immédiatement

$B = 0$.

D'où, pour $x = L$
et en posant $\alpha L = r$

$$\begin{cases} Y = \operatorname{ch} r - \cos r \\ Y' = \alpha(\operatorname{sh} r + \sin r) \\ Y'' = \alpha^2 (\operatorname{ch} r + \cos r) \\ \int Y\,dx = \frac{1}{\alpha} (\operatorname{sh} r - \sin r) \end{cases} \tag{23}$$

5,214 - Equation aux fréquences .

En portant les équations (23) dans (16) et (17) et après simplification, il vient :

$$r^2(\mathrm{sh}^2 r - \sin^2 r)(\nu^2 + k^2) - r\nu(2\,\mathrm{sh}\,r\,\mathrm{ch}\,r + 2\sin r\cos r) + (\mathrm{ch}^2 r - \cos^2 r) = 0 \qquad (24)$$

Cette équation peut s'écrire en fonction de l'angle 2r, d'où l'équation transcendante aux fréquences :

$$r^2(\mathrm{ch}\,2r + \cos 2r - 2)(\nu^2 + k^2) - 2r\nu(\mathrm{sh}\,2r + \sin 2r) + \mathrm{ch}\,2r - \cos 2r = 0 \qquad (25)$$

Soit F(r) cette fonction : on constate immédiatement que c'est une fonction paire de r .

La figure V,7 montre l'allure de F(r) pour $k^2 = \frac{1}{12}$, valeur correspondant à une lame de section rectangulaire constante et pour diverses valeurs de ν . On constate qu'il y a au plus une racine , ce qui est le cas général des lames fortement surchargées . On vérifie que lorsque r croît, F(r) tend vers : $e^{2r}\left[\frac{r^2}{2}(\nu^2 + k^2) - r + 1/2\right]$, fonction croissante . Ceci nous dispense donc de calculer F(r) pour r grand .

Soit r_1 racine de (25) pour des valeurs particulières de ν et k; la fréquence de la vibration transversale cherchée s'écrit :

$$f = \frac{e}{4\pi L^2}\sqrt{\frac{E}{3\delta}} \cdot r_1^2 \qquad (26)$$

Pour l'élinvar, on peut donner une formule approchée :

$$f \simeq 2 \cdot 10^4 \cdot \frac{e}{L^2}\, r_1^2 \quad \text{avec } e \text{ et } L \text{ en cm .} \qquad (26')$$

L'équation (15), compte tenu de (23) donne le rapport des masses :

$$\lambda = \frac{(\mathrm{sh}\,r - \sin r)}{r^2\nu(\mathrm{sh}\,r + \sin r) - r(\mathrm{ch}\,r - \cos r)} \qquad (27)$$

Les équations (25) et (27) résolvent entièrement le problème . On aurait aussi bien pu calculer (25) en fonction de λ , mais tout rapport de masse est réalisable alors qu'il est souvent difficile de prendre ν grand .

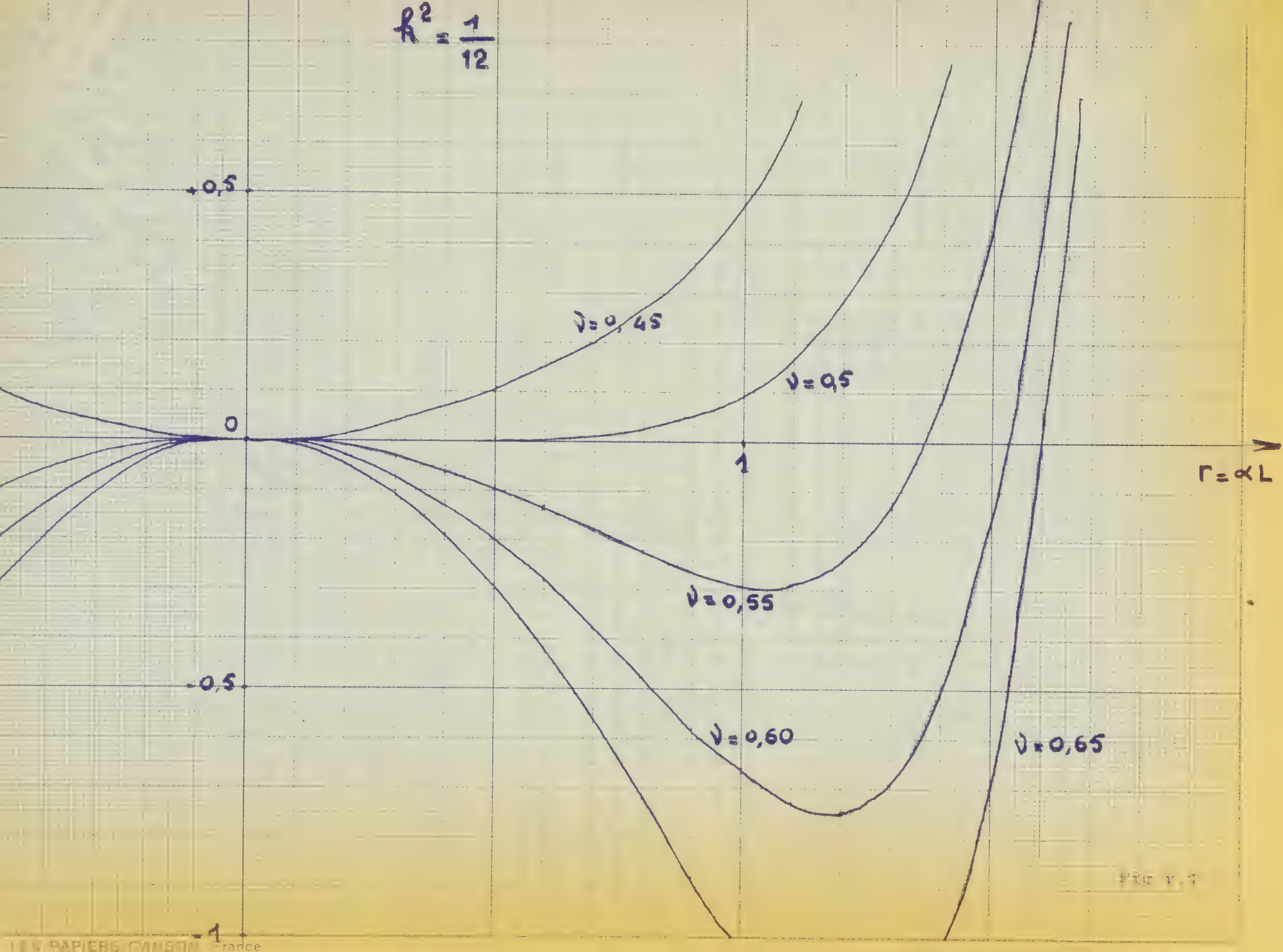


Fig V.1

LES PAPIERS CANSON France

5,215 - Recherche du noeud de déplacement de la surcharge .

Il est très important pour l'utilisateur de connaître la position du centre de rotation de la surcharge afin de disposer judicieusement les éléments capteurs et excitateurs et les fils de suspension. Soit s l'abscisse de ce point : par analogie avec la formule (8), nous pouvons écrire :

$$Y - Y'(L - s) = 0 \quad \text{ou} \quad s = L - \frac{Y}{Y'} \tag{28}$$

En remplaçant Y et Y' par les valeurs correspondantes tirées des équations (23), on obtient :

$$\boxed{\frac{s}{L} = 1 - \frac{\operatorname{ch} r - \cos r}{r(\operatorname{sh} r + \sin r)}} \tag{29}$$

5,216 - Calcul de l'énergie de déformation .

Il est indispensable de connaître l'énergie de déformation de la lame déformable en fonction de son amplitude à l'extrémité y_L . En effet, l'oscillateur doit céder à chaque période une partie de son énergie au circuit de commande d'un amplificateur . Cette perte est connue au départ de toute réalisation, en fonction de la fréquence choisie et du principe mis en oeuvre; elle doit être négligeable devant l'énergie totale pour ne pas abaisser la surtension pratique . Il faut noter toutefois qu'il est inutile de connaître l'énergie de déformation avec une grande précision : nous nous limiterons donc à l'énergie due à la flexion . Dès lors :

$$W = \frac{1}{2\,EI}\int_0^L \mathcal{M}^2\,ds \qquad \mathcal{M} \text{ est donné par (5)}$$

$$W = \frac{1}{2\,EI}\int_0^L \left[-(u - x)M\,\frac{d^2v}{dt^2} - J\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right]^2 dx \tag{30}$$

d'où en développant :

$$W = \frac{1}{2\,EI}\left[\left(\frac{Md^2v}{dt^2}\right)^2 \int_0^L (x-u)^2 dx + \left(\frac{J\,d^2\varphi}{dt^2}\right)^2 \int_0^L dx - 2M\,\frac{d^2v}{dt^2}\,J\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\int_0^L (x-u)\,dx \right]$$

soit après intégration :

$$W = \frac{1}{2\,EI}\left[\left(\frac{Md^2v}{dt^2}\right)^2 \left(\frac{L^3}{3} + u^2L - 2u\,\frac{L^2}{2}\right) + \left(J\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)^2 L - 2M\,\frac{d^2v}{dt^2}\,J\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\frac{L^2}{2} - uL\right) \right]$$

Remplaçons J par Mk^2L^2

$$W = \frac{M^2L^3}{2\,EI}\left[\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)^2(\mu^2-\mu+\tfrac{1}{3}) + \left(k^2L\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)^2 - 2k^2\,\frac{d^2v}{dt^2}\,L\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,(\tfrac{1}{2}-\mu)\right] \qquad (31)$$

Soit $\mathcal{V} = V_{(x)}e^{i\omega t}$, $V = Y_L - Y'_L\,L\,\gamma$. Utilisons de plus les formules (11) :

$$W = \frac{M^2L^3}{2\,EI}\left[\omega^4V^2(\mu^2-\mu+\tfrac{1}{3}) + (-k^2LY'_L\omega^2)^2 - 2k^2\omega^4V\,L\,Y'_L(\tfrac{1}{2}-\mu)\right]e^{2i\omega t}$$

$$= \frac{M^2L^3}{2\,EI}\left[(Y_L-Y'_L\,L\,\gamma)^2(\mu^2-\mu+\tfrac{1}{3}) + (k^2LY'_L)^2 - 2k^2(Y_L-Y'_L\,L\,\gamma)LY'_L(\tfrac{1}{2}-\mu)\right]\omega^4e^{2i\omega t}$$

soit : $\dfrac{Y'_L\,L}{Y_L} = \gamma$

$$W = \frac{M^2L^3\omega^4}{2\,EI}\,y^2_L\left[(1-\gamma\gamma)(\mu^2-\mu+\tfrac{1}{3}) + (k^2\gamma)^2 - 2k^2(1-\gamma\gamma)\,\gamma(\tfrac{1}{2}-\mu)\right] \qquad (32)$$

L'équation (10) nous fournit :

$$\frac{M^2L^3\omega^4}{E\,I} = \frac{\lambda^2r^8}{L^3}\,EI$$

d'où finalement :

$$W = \frac{EI}{L^3}\,y^2_L\left\{\left[(1-\gamma\gamma)(\gamma^2-\gamma+\tfrac{1}{3}) + k^4\gamma^2 - 2k^2\,\gamma(1-\gamma\gamma)(\gamma-\tfrac{1}{2})\right]\frac{\lambda^2r^8}{2}\right\} \qquad (33)$$

Nous retrouverons bien une expression classique de l'énergie de déformation pour les lames surchargées . L'accolade est un nombre sans dimensions .

5,217 - Calcul de la contrainte maximale dans la lame déformable .

En fonction du matériau utilisé on détermine une contrainte qu'il est souhaitable de ne pas dépasser pour ne pas accroître l'amortissement interne et le défaut d'isochronisme et surtout pour ne pas dépasser la limite élastique sous l'effet des perturbations. Cette contrainte va donc limiter l'amplitude y_L qui intervient dans l'expression de l'énergie de déformation . On sait que : $\eta = \dfrac{\mathcal{M}_e}{2\,I}$. Le moment fléchissant est maximum pour x = 0 :

$$\mathcal{M}_{max} = -\,uM\,\frac{d^2v}{dt^2} - J\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad (34)$$

$$\eta_{max} = \frac{e}{2\,I}\left(-\,uM\,\frac{d^2v}{dt^2} - J\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) \qquad (35)$$

En utilisant la même méthode qu'au paragraphe précédent nous obtenons :

$$\eta_{max} = \frac{e}{2I} M\omega^2 e^{i\omega t} (uV + k^2L^2Y'_L)$$

$$= \frac{e}{2I} ML\omega^2 e^{i\omega t} \left[\mu(Y_L - Y'_L L\nu) + k^2 LY'_L\right]$$

Or : $$M\omega^2 L = \frac{\lambda r^4 E I}{L^2}$$

$$\eta_{max} = \frac{E e}{L^2} y_L \left[\mu(1 - \gamma\nu) + k^2\gamma\right] \frac{\lambda r^4}{2} \qquad (36)$$

Cette équation permer de calculer $y_{L\ max}$. On ne peut dès lors ajuster W qu'en agissant sur h : largeur de la lame .

5,218 - Utilisation d'une seule branche du diapason .

On peut fort bien n'utiliser qu'une seule branche du diapason . La lame déformable doit alors être encastrée suivant Oz . La photographie V, 8 prise en mouvement, montre une telle disposition . On voit de façon particulièrement nette l'existence d'un noeud de rotation . On se trouve pratiquement ramené au diapason classique avec une réaction à fréquence double sur le support, mais avec l'avantage d'un seul oscillateur , donc sans difficultés d'accord ; par contre, il y a un couple de réaction . Il faut noter qu'il est encore possible d'annuler la réaction dirigée suivant Ox : cela réduit beaucoup les solutions possibles mais présente un intérêt certain dans le cas d'utilisation d'une seule branche . Cette solution peut être considérée comme une lame du type Clifford améliorée .

Figure V, 8

5,219 - Remarques concernant la pratique des calculs .

Suivant le mode de réalisation adopté, les valeurs de k peuvent varier entre d'assez larges limites . En effet, on peut prendre les surcharges dans la même bande de laminé que le diapason lui-même, tout comme on peut les constituer en grande partie par des aimants utiles à l'entretien . Ces surcharges auront pratiquement une longueur maximale de $2L$. Leur disposition à une cote y non nulle entraînant une augmentation de leur moment d'inertie , k^2 peut atteindre $0,3$. Or, une petite erreur sur k peut entraîner une grande erreur sur la fréquence et le rapport des masses comme le montrent les courbes V, 9 . Il faut donc dresser des tables, car le maniement rapide des équations (25) et (27) est impossible et les retouches successives nécessaires dans la pratique prennent des journées entières de travail . Ces tables, situées en annexe, ont été établies avec une machine à calculer CAB 500 . Les courbes V,10 montrent que l'on n'a pas intérêt à prendre ν grand pour diminuer la fréquence . Notons encore que le travail au planimètre est souvent d'une grande utilité pour déterminer la forme et la position du centre de gravité des surcharges .

5,22 - Calcul par la méthode de Rayleigh .

Nous avons recherché si des méthodes approchées permettraient de calculer ce diapason avec une approximation suffisante . La méthode de Rayleigh qui consiste à appliquer une force fictive F à l'extrémité de la lame déformable conduit aux résultats suivants :

L'équation de la déformée est immédiate :

$$y = \frac{F}{E\,I}\left(\frac{L\,x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

L'expression de $\frac{\partial y}{\partial x}$ pour $x = L$ nous fournit v :

D'après (8) :

$$v = \frac{F\,L^3}{E\,I}\left(\frac{1}{3} - \frac{\nu}{2}\right)$$

Soit β l'ordonnée du centre de gravité de la lame OA ; nous voulons :

$$\beta m + v M = 0$$

ou : $$v\lambda + \beta = 0$$

$$\beta = \frac{1}{L}\int_0^L y\,dx = \frac{F L^3}{8 E I}$$

En remplaçant donc v et β par leurs valeurs, on trouve :

$$(\frac{1}{3} - \frac{\nu}{2})\ \lambda + \frac{1}{8} = 0$$

ou : $$\lambda = \frac{3}{12\,\nu - 8}$$

λ doit être positif, donc :

$$\nu > \frac{2}{3}$$

Cette condition n'est peut-être pas très éloignée de celle fournie par l'étude rigoureuse, mais l'approximation reste tout de même très insuffisante pour la pratique, puisque le terme en k^2 n'intervient pas . Il est inutile d'exposer plus avant ce calcul .

Ayant fait intervenir avec succès pour les lames vibrantes, en plus de la force appliquée à l'extrémité, un terme équivalent à une masse répartie, ce qui réduit l'erreur de fréquence de 1,5 % à 0,5% , nous avons essayé cette méthode pour notre diapason . Malheureusement, l'approximation n'est pas meilleure : le terme en k^2 n'apparaît toujours pas dans l'expression de la déformée . Cette méthode est donc incapable de fournir le rapport λ. Si l'on utilise la valeur fournie par la théorie rigoureuse, on s'aperçoit que les calculs de fréquence sont encore très longs . L'intérêt d'une méthode approchée disparait donc totalement .

Monsieur CHALEAT nous a fait part de ses propres remarques montrant que si la méthode de Rayleigh ou celle de Ritz permettent d'approcher les calculs de fréquence avec une excellente précision, elles sont incapables de fournir une approximation de la déformée dynamique .

5,23 - Etude expérimentale .

La réalisation avec surcharges découpées et pliées montrée figure V, 8 convenant surtout aux petits diapasons d'une épaisseur de l'ordre de

0,5 mm, nous avons fait usiner une pièce dans la masse, avec une précision de ± 0,01 mm sur toutes les cotes (fig V, 11)

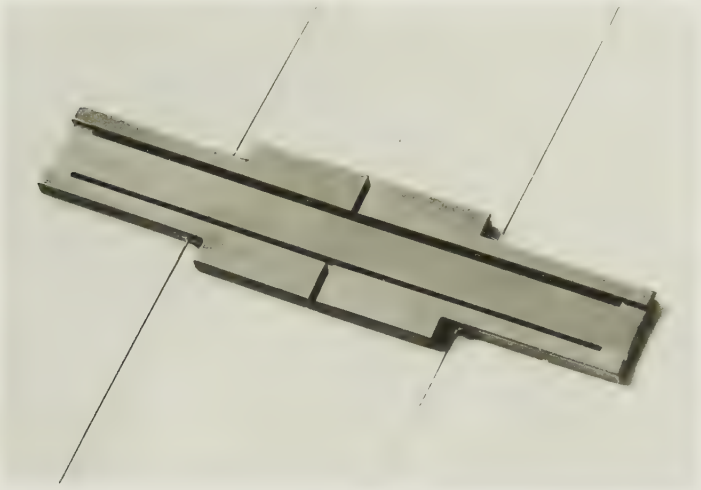


Figure V, 11

Nous ne donnerons pas les calculs relatifs à cette pièce ; ils ont été faits avant de disposer des tables numériques, ce qui les a rendus particulièrement laborieux . Les dimensions hors-tout de ce diapason sont : longueur 66, largeur 15,84, hauteur sur surcharges 2 . Comme on le voit sur la photographie, la suspension est obtenue par quatre fils de bronze au glucinium de Ø 0,2 soudés dans de petits canons en laiton chassés dans l'axe des noeuds de rotation des surcharges . L'épaisseur de la lame étant de 1 mm et la fréquence 384 Hz, on est très loin du pic de relaxation thermique . On pouvait donc s'attendre à une surtension dépassant 10^4 ; nous avons obtenu 11 900 dans l'air et 28 000 dans le vide . Aucune marche aux positions n'a pu être décelée par des mesures de fréquence en 100 s au compteur électronique . Pour des amplitudes variant dans un rapport 10, le défaut d'isochronisme est de 2.10^{-5} : il s'agit d'un retard aux grandes amplitudes . Pour les variations normales d'amplitude, on voit que ce défaut est parfaitement négligeable . La variation de tension des fils de suspension produit une marche diurne de 4 s , sans affecter la surtension, sauf aux fortes tensions pour lesquelles le diapason se déforme nettement . Il faudrait relier les surcharges deux à deux pour éviter cette déformation, ce qui réduirait certainement l'influence de la tension des fils .

Nous avons noté un fonctionnement tout à fait imprévu de surcharges en diapason de cisaillement à une fréquence de 367 Hz, donc très proche de celle correspondant au fonctionnement en diapason de flexion . Nous espérons que la liaison prévue entre les surcharges éliminera ce partiel gênant . Cette étude expérimentale très insuffisante se poursuivra dès que nous aurons une connaissance plus précise du frottement interne de l'élinvar .

NOTATIONS RELATIVES AU CHAPITRE IV

Pour la lame déformable :

m : masse

L : longueur

e : épaisseur

h : largeur

I : moment d'inertie de la section droite $= \frac{e^3 h}{12}$

Pour la lame indéformable :

M : masse

G : centre de gravité

u : abscisse de G

v : ordonnée de G

J : moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à Oz et passant par G

ρ : rayon de giration dans le moment d'inertie ci-dessus

$k = \frac{\rho}{L}$

Pour les deux :

δ : masse spécifique

E : module d'élasticité

$\frac{M}{m} = \lambda$

$\frac{u}{L} = \mu$

$1 - \mu = \nu$

$\alpha L = \Gamma$

η : contrainte

W : énergie de déformation

Références

[1] - TIMOSHENKO : Théorie des vibrations

[2] - Notes personnelles de M. CHALEAT concernant le calcul des lames surchargées.

-:-:-:-

C O N C L U S I O N

Nous avons, dans ces pages, fait le procès du diapason en U . Nul doute cependant que son utilisation dans les montres et comme filtre de bande n'ait encore devant elle un avenir assuré . Nous pensons avoir montré l'intérêt de l'évolution vers le diapason "élastiquement parfait", qui n'est plus constitué de deux oscillateurs couplés, mais pratiquement d'un seul dont la symétrie par rapport à un plan n'est plus exigée : le diapason suspendu passe alors de trois degrés de liberté à deux et sa réalisation industrielle pose des problèmes beaucoup moins délicats : il n'y a plus à assurer l'égalité des raideurs et des masses des deux parties constituantes . Nous avons abouti à un diapason de flexion répondant aux exigences que nous nous étions fixé , mais nous sommes convaincu qu'il est possible de trouver encore beaucoup d'autres formes tout aussi satisfaisantes .

D'énormes progrès restent à faire dans les domaines sur lesquels nous nous sommes particulièrement penché . D'ailleurs, à quelques puissances de dix de là, les quartz présentent les mêmes problèmes : Monsieur IANOUCHEWSKY signalait récemment les difficultés dues à la fixation, à l'isolation passive, aux couplages,dans les étalons lenticulaires ...

L'étude détaillée des oscillateurs suspendus dont le type est la lame vibrante avec extrémités libres présenterait un intérêt certain . Une telle étude profiterait d'ailleurs certainement aux quartz si le spectre de relaxation des fils de suspension était exploré jusqu'en haute fréquence .

Un important travail reste également à entreprendre en collaboration avec les métallurgistes pour étudier à fond le frottement interne de l'élinvar et les moyens d'améliorer sa stabilité . Il faudrait aussi s'efforcer de réduire son coefficient de dilatation linéaire et sa conductibilité thermique de façon à décaler le pic de relaxation thermique vers les basses fréquences, et à réduire sa hauteur .

Enfin, un effort d'imagination est à faire pour trouver des capteurs de mouvements relatifs adaptés aux petits oscillateurs . Peut-être la solution viendra-t-elle des transistors sensibles à un effort dont on attend avec impatience de pouvoir disposer . En attendant, le développement des filaments de silicium pourrait abaisser leur prix et fournir déjà de remarquables capteurs miniatures .

-:-:-:-:-:-

A N N E X E

TABLES PERMETTANT LA DETERMINATION RAPIDE DES PROPORTIONS DES DIAPASONS ETUDIES AU CHAPITRE 5 .

Ces tables ont été établies avec la "précision machine" de la CAB 500 . Nous estimons largement suffisant de ne les transcrire qu'avec 4 chiffres significatifs . Une précision plus grande ne serait justifiée qu'en faisant intervenir l'inertie de rotation et le cisaillement dans la lame déformable . Cette précision resterait illusoire dans la pratique, vu les tolérances normales d'usinage .

On remarque que l'abscisse du noeud de déplacement de la surcharge varie très peu ; cela permet de bien accepter une légère variation du rapport des masses lors de l'ajustement de fréquence .

Pour une valeur de ν très voisine de 0,5 , la valeur de la racine ne dépend pratiquement que du rapport des masses . La fonction est alors confondue avec l'axe des abscisses . On peut trouver exactement la valeur de ν pour chaque valeur de k^2 , en annulant simultanément $F(r)$, $F'(r)$, $F''(r)$. Il est plus rapide d'écrire encore ν sous la forme $(0,50 + \varepsilon)$

-:-:-:-:-:-:-

$k^2 = 0,05$

ν	r	λ	$\frac{s}{L}$
0,50		pas de racine	
0,51	1,125	11,44	0,5044
0,52	1,304	5,861	0,5078
0,53	1,410	3,988	0,5106
0,54	1,482	3,044	0,5129
0,55	1,535	2,475	0,5148
0,56	1,576	2,092	0,5163
0,57	1,607	1,816	0,5176
0,58	1,632	1,608	0,5187
0,59	1,653	1,445	0,5196
0,60	1,669	1,313	0,5203
0;61	1,682	1,205	0,5209
0,62	1,692	1,114	0,5214
0,63	1,700	1,037	0,5218
0,64	1,707	0,9698	0,5221
0,65	1,712	0,9115	0,5223
0,66	1,716	0,8602	0,5225
0,67	1,719	0,8147	0,5227
0,68	1,720	0,7740	0,5228
0,69	1,721	0,7373	0,5228
0,70	1,722	0,7041	0,5228
0,71	1,722	0,6739	0,5228
0,72	1,721	0,6463	0,5228
0,73	1,720	0,6210	0,5227
0,74	1,718	0,5977	0,5226
0,75	1,716	0,5761	0,5225
0,76	1,714	0,5561	0,5224
0,77	1,711	0,5375	0,5223
0,78	1,709	0,5201	0,5222
0,79	1,706	0,5039	0,5220
0,80	1,703	0,4886	0,5219
0,81	1,700	0,4743	0,5217
0,82	1,696	0,4609	0,5216
0,83	1,693	0,4482	0,5214
0,84	1,689	0,4362	0,5213
0,85	1,686	0,4248	0,5211
0,86	1,682	0,4140	0,5209
0,87	1,678	0,4038	0,5207
0,88	1,675	0,3941	0,5206
0,89	1,671	0,3848	0,5204
0,90	1,667	0,3760	0,5202
0,91	1,663	0,3676	0,5200
0,92	1,659	0,3596	0,5199
0,93	1,655	0,3519	0,5197
0,94	1,651	0,3445	0,5195
0,95	1,647	0,3375	0,5193
0,96	1,643	0,3307	0,5192
0,97	1,640	0,3242	0,5190
0,98	1,636	0,3180	0,5188
0,99	1,632	0,3120	0,5186
1,00	1,628	0,3062	0,5185

$k^2 = 0,06$

ν	r	λ	$\frac{S}{L}$
0,50		pas de racine	
0,51	1,064	12,23	0,5035
0,52	1,239	6,204	0,5064
0,53	1,345	4,190	0,5088
0,54	1,420	3,180	0,5109
0,55	1,476	2,571	0,5127
0,56	1,519	2,164	0,5142
0,57	1,554	1,873	0,5155
0,58	1,581	1,653	0,5165
0,59	1,604	1,481	0,5175
0,60	1,623	1,343	0,5183
0,61	1,638	1,230	0,5189
0,62	1,651	1,135	0,5195
0,63	1,661	1,055	0,5199
0,64	1,669	0,9853	0,5203
0,65	1,676	0,9249	0,5206
0,66	1,682	0,8718	0,5209
0,67	1,686	0,8248	0,5211
0,68	1,689	0,7829	0,5213
0,69	1,692	0,7452	0,5214
0,70	1,694	0,7111	0,5215
0,71	1,695	0,6801	0,5215
0,72	1,695	0,6519	0,5215
0,73	1,695	0,6260	0,5215
0,74	1,695	0,6021	0,5215
0,75	1,694	0,5801	0,5215
0,76	1,692	0,5597	0,5214
0,77	1,691	0,5408	0,5213
0,78	1,689	0,5231	0,5212
0,79	1,687	0,5066	0,5211
0,80	1,685	0,4911	0,5210
0,81	1,682	0,4766	0,5209
0,82	1,679	0,4629	0,5208
0,83	1,677	0,4501	0,5207
0,84	1,674	0,4379	0,5205
0,85	1,671	0,4264	0,5204
0,86	1,667	0,4155	0,5202
0,87	1,664	0,4052	0,5201
0,88	1,661	0,3954	0,5199
0,89	1,658	0,3860	0,5198
0,90	1,654	0,3771	0,5196
0,91	1,651	0,3686	0,5195
0,92	1,647	0,3605	0,5193
0,93	1,644	0,3528	0,5192
0,94	1,640	0,3453	0,5190
0,95	1,637	0,3382	0,5189
0,96	1,633	0,3314	0,5187
0,97	1,630	0,3249	0,5185
0,98	1,626	0,3186	0,5184
0,99	1,622	0,3125	0,5182
1,00	1,619	0,3067	0,5181

$k^2 = 0,07$

ν	x	λ	$\frac{s}{L}$
0,50	0,15	$1,34.10^5$	0,5000
0,51	1,013	12,82	0,5029
0,52	1,186	6,467	0,5054
0,53	1,292	4,348	0,5076
0,54	1,368	3,287	0,5095
0,55	1,425	2,650	0,5111
0,56	1,471	2,224	0,5125
0,57	1,507	1,919	0,5138
0,58	1,537	1,690	0,5148
0,59	1,561	1,512	0,5158
0,60	1,582	1,369	0,5166
0,61	1,599	1,252	0,5173
0,62	1,613	1,154	0,5179
0,63	1,625	1,070	0,5184
0,64	1,635	0,9998	0,5188
0,65	1,644	0,9367	0,5192
0,66	1,651	0,8821	0,5195
0,67	1,656	0,8339	0,5197
0,68	1,661	0,7909	0,5199
0,69	1,665	0,7523	0,5201
0,70	1,667	0,7174	0,5202
0,71	1,670	0,6858	0,5203
0,72	1,671	0,6569	0,5204
0,73	1,672	0,6305	0,5204
0,74	1,672	0,6062	0,5205
0,75	1,672	0,5838	0,5205
0,76	1,672	0,5631	0,5204
0,77	1,671	0,5438	0,5204
0,78	1,670	0,5259	0,5204
0,79	1,669	0,5091	0,5203
0,80	1,667	0,4934	0,5202
0,81	1,665	0,4787	0,5201
0,82	1,663	0,4649	0,5200
0,83	1,661	0,4519	0,5199
0,84	1,659	0,4396	0,5198
0,85	1,656	0,4279	0,5197
0,86	1,654	0,4169	0,5196
0,87	1,651	0,4065	0,5195
0,88	1,648	0,3966	0,5194
0,89	1,645	0,3871	0,5192
0,90	1,642	0,3782	0,5191
0,91	1,639	0,3696	0,5190
0,92	1,636	0,3614	0,5188
0,93	1,633	0,3536	0,5187
0,94	1,630	0,3461	0,5186
0,95	1,626	0,3390	0,5184
0,96	1,623	0,3321	0,5183
0,97	1,620	0,3255	0,5181
0,98	1,617	0,3192	0,5180
0,99	1,613	0,3131	0,5178
1,00	1,610	0,3073	0,5177

$k^2 = 0,08$

ν	r	λ	$\frac{s}{L}$
0,50	pas de racine		
0,51	0,9736	13,27	0,5025
0,52	1,143	6,674	0,5047
0,53	1,248	4,475	0,5066
0,54	1,324	3,375	0,5083
0,55	1,382	2,714	0,5099
0,56	1,428	2,274	0,5112
0,57	1,466	1,959	0,5124
0,58	1,497	1,722	0,5134
0,59	1,523	1,538	0,5143
0,60	1,545	1,391	0,5151
0,61	1,564	1,270	0,5159
0,62	1,579	1,170	0,5165
0,63	1,593	1,084	0,5170
0,64	1,604	1,011	0,5175
0,65	1,614	0,9472	0,5179
0,66	1,622	0,8913	0,5182
0,67	1,629	0,8420	0,5185
0,68	1,634	0,7981	0,5188
0,69	1,639	0,7587	0,5190
0,70	1,643	0,7231	0,5191
0,71	1,646	0,6909	0,5193
0,72	1,649	0,6616	0,5194
0,73	1,650	0,6347	0,5195
0,74	1,652	0,6100	0,5195
0,75	1,652	0,5872	0,5195
0,76	1,653	0,5662	0,5196
0,77	1,653	0,5467	0,5196
0,78	1,652	0,5285	0,5195
0,79	1,651	0,5115	0,5195
0,80	1,650	0,4956	0,5195
0,81	1,649	0,4807	0,5195
0,82	1,648	0,4667	0,5193
0,83	1,646	0,4535	0,5193
0,84	1,644	0,4411	0,5192
0,85	1,642	0,4294	0,5191
0,86	1,640	0,4183	0,5190
0,87	1,638	0,4077	0,5189
0,88	1,635	0,3977	0,5188
0,89	1,633	0,3882	0,5187
0,90	1,630	0,3791	0,5186
0,91	1,628	0,3705	0,5185
0,92	1,625	0,3623	0,5184
0,93	1,622	0,3544	0,5182
0,94	1,619	0,3469	0,5181
0,95	1,616	0,3397	0,5180
0,96	1,613	0,3328	0,5179
0,97	1,610	0,3261	0,5177
0,98	1,607	0,3198	0,5176
0,99	1,604	0,3137	0,5175
1,00	1,601	0,3078	0,5174

$k^2 = 0,09$

ν	r	λ	$\frac{s}{L}$
0,50	pas de racine		
0,51	0,9405	13,63	0,5022
0,52	1,106	6,841	0,5041
0,53	1,210	4,578	0,5059
0,54	1,286	3,447	0,5074
0,55	1,344	2,768	0,5088
0,56	1,391	2,316	0,5101
0,57	1,430	1,992	0,5112
0,58	1,462	1,750	0,5122
0,59	1,489	1,561	0,5131
0,60	1,512	1,410	0,5139
0,61	1,532	1,287	0,5146
0,62	1,549	1,184	0,5153
0,63	1,563	1,096	0,5158
0,64	1,576	1,021	0,5163
0,65	1,586	0,9565	0,5167
0,66	1,595	0,8996	0,5171
0,67	1,603	0,8493	0,5174
0,68	1,610	0,8046	0,5177
0,69	1,615	0,7645	0,5180
0,70	1,620	0,7283	0,5182
0,71	1,624	0,6956	0,5183
0,72	1,627	0,6658	0,5185
0,73	1,630	0,6385	0,5186
0,74	1,632	0,6135	0,5186
0,75	1,633	0,5904	0,5187
0,76	1,634	0,5691	0,5188
0,77	1,635	0,5493	0,5188
0,78	1,635	0,5309	0,5188
0,79	1,635	0,5137	0,5188
0,80	1,635	0,4976	0,5188
0,81	1,634	0,4826	0,5187
0,82	1,633	0,4684	0,5187
0,83	1,632	0,4551	0,5186
0,84	1,630	0,4426	0,5186
0,85	1,629	0,4307	0,5185
0,86	1,627	0,4195	0,5184
0,87	1,625	0,4089	0,5184
0,88	1,623	0,3988	0,5183
0,89	1,621	0,3892	0,5182
0,90	1,619	0,3801	0,5181
0,91	1,617	0,3714	0,5180
0,92	1,614	0,3631	0,5179
0,93	1,612	0,3552	0,5178
0,94	1,609	0,3476	0,5177
0,95	1,607	0,3403	0,5176
0,96	1,604	0,3334	0,5175
0,97	1,601	0,3267	0,5174
0,98	1,598	0,3203	0,5172
0,99	1,596	0,3142	0,5171
1,00	1,593	0,3083	0,5170

$k^2 = 0,10$

ν	r	λ	$\frac{s}{L}$
0,50		pas de racine	
0,51	0,9123	13,92	0,5019
0,52	1,074	6,977	0,5037
0,53	1,177	4,664	0,5053
0,54	1,252	3,507	0,5067
0,55	1,311	2,813	0,5080
0,56	1,358	2,351	0,5092
0,57	1,397	2,021	0,5103
0,58	1,430	1,774	0,5113
0,59	1,458	1,581	0,5121
0,60	1,482	1,427	0,5129
0,61	1,530	1,301	0,5136
0,62	1,520	1,196	0,5132
0,63	1,536	1,107	0,5148
0,64	1,549	1,031	0,5153
0,65	1,561	0,9649	0,5157
0,66	1,571	0,9070	0,5161
0,67	1,579	0,8559	0,5165
0,68	1,587	0,8105	0,5168
0,69	1,593	0,7698	0,5170
0,70	1,599	0,7331	0,5172
0,71	1,603	0,6999	0,5174
0,72	1,607	0,6697	0,5176
0,73	1,611	0,6421	0,5177
0,74	1,613	0,6167	0,5179
0,75	1,615	0,5933	0,5179
0,76	1,617	0,5717	0,5180
0,77	1,618	0,5517	0,5181
0,78	1,619	0,5331	0,5181
0,79	1,619	0,5157	0,5181
0,80	1,619	0,4995	0,5181
0,81	1,619	0,4843	0,5181
0,82	1,619	0,4700	0,5181
0,83	1,618	0,4566	0,5181
0,84	1,617	0,4440	0,5180
0,85	1,616	0,4320	0,5180
0,86	1,615	0,4207	0,5179
0,87	1,613	0,4100	0,5179
0,88	1,612	0,3998	0,5178
0,89	1,610	0,3902	0,5177
0,90	1,608	0,3810	0,5176
0,91	1,606	0,3722	0,5176
0,92	1,604	0,3639	0,5175
0,93	1,602	0,3559	0,5174
0,94	1,599	0,3483	0,5173
0,95	1,597	0,3410	0,5172
0,96	1,595	0,3340	0,5171
0,97	1,592	0,3273	0,5170
0,98	1,590	0,3209	0,5169
0,99	1,587	0,3147	0,5168
1,00	1,585	0,3087	0,5167

$k^2 = 0,11$

ν	r	λ	$\frac{s}{L}$
0,50	pas de racine		
0,51	0,8879	14,16	0,5017
0,52	1,047	7,091	0,5033
0,53	1,148	4,736	0,5048
0,54	1,223	3,558	0,5061
0,55	1,281	2,852	0,5073
0,56	1,329	2,382	0,5085
0,57	1,368	2,046	0,5095
0,58	1,401	1,794	0,5104
0,59	1,430	1,599	0,5112
0,60	1,455	1,442	0,5120
0,61	1,476	1,314	0,5127
0,62	1,494	1,207	0,5133
0,63	1,511	1,117	0,5139
0,64	1,525	1,040	0,5144
0,65	1,537	0,9725	0,5148
0,66	1,548	0,9138	0,5152
0,67	1,557	0,8620	0,5156
0,68	1,565	0,8159	0,5159
0,69	1,572	0,7746	0,5162
0,70	1,579	0,7375	0,5164
0,71	1,584	0,7039	0,5167
0,72	1,588	0,6733	0,5168
0,73	1,592	0,6453	0,5170
0,74	1,596	0,6197	0,5171
0,75	1,598	0,5961	0,5172
0,76	1,600	0,5742	0,5173
0,77	1,602	0,5540	0,5174
0,78	1,603	0,5352	0,5174
0,79	1,604	0,5177	0,5175
0,80	1,605	0,5013	0,5175
0,81	1,605	0,4860	0,5175
0,82	1,605	0,4716	0,5175
0,83	1,605	0,4580	0,5175
0,84	1,604	0,4453	0,5175
0,85	1,604	0,4332	0,5175
0,86	1,603	0,4218	0,5174
0,87	1,602	0,4110	0,5174
0,88	1,600	0,4003	0,5173
0,89	1,599	0,3911	0,5173
0,90	1,597	0,3818	0,5172
0,91	1,596	0,3730	0,5171
0,92	1,594	0,3646	0,5171
0,93	1,592	0,3566	0,5170
0,94	1,590	0,3489	0,5169
0,95	1,588	0,3416	0,5168
0,96	1,586	0,3346	0,5167
0,97	1,584	0,3278	0,5166
0,98	1,581	0,3214	0,5165
0,99	1,579	0,3152	0,5165
1,00	1,577	0,3092	0,5164

$k^2 = 0,12$

ν	r	λ	$\frac{s}{L}$
0,50	pas de racine		
0,51	0,8664	14,36	0,5016
0,52	1,022	7,188	0,5030
0,53	1,122	4,797	0,5044
0,54	1,196	3,602	0,5056
0,55	1,255	2,886	0,5067
0,56	1,302	2,409	0,5078
0,57	1,342	2,068	0,5088
0,58	1,376	1,812	0,5097
0,59	1,405	1,614	0,5105
0,60	1,430	1,455	0,5112
0,61	1,451	1,325	0,5119
0,62	1,470	1,217	0,5125
0,63	1,487	1,126	0,5131
0,64	1,502	1,047	0,5136
0,65	1,515	0,979	0,5140
0,66	1,526	0,9199	0,5144
0,67	1,536	0,8674	0,5148
0,68	1,545	0,8208	0,5151
0,69	1,553	0,7791	0,5154
0,70	1,560	0,7415	0,5157
0,71	1,565	0,7075	0,5159
0,72	1,571	0,6766	0,5161
0,73	1,575	0,6483	0,5163
0,74	1,579	0,6224	0,5164
0,75	1,582	0,5986	0,5166
0,76	1,585	0,5766	0,5167
0,77	1,587	0,5561	0,5168
0,78	1,589	0,5372	0,5168
0,79	1,590	0,5195	0,5169
0,80	1,591	0,5030	0,5169
0,81	1,592	0,4875	0,5170
0,82	1,592	0,4730	0,5170
0,83	1,592	0,4594	0,5170
0,84	1,592	0,4465	0,5170
0,85	1,592	0,4344	0,5170
0,86	1,591	0,4229	0,5169
0,87	1,590	0,4120	0,5169
0,88	1,589	0,4017	0,5169
0,89	1,588	0,3920	0,5168
0,90	1,587	0,3827	0,5168
0,91	1,586	0,3738	0,5167
0,92	1,584	0,3653	0,5167
0,93	1,582	0,3573	0,5166
0,94	1,581	0,3496	0,5165
0,95	1,579	0,3422	0,5165
0,96	1,577	0,3351	0,5164
0,97	1,575	0,3284	0,5163
0,98	1,573	0,3219	0,5162
0,99	1,571	0,3156	0,5161
1,00	1,569	0,3096	0,5161

$k^2 = 0,13$

ν	r	λ	$\frac{s}{L}$
0,50	pas de racine		
0,51	0,8472	14,53	0,5014
0,52	1,000	7,270	0,5028
0,53	1,099	4,850	0,5040
0,54	1,172	3,641	0,5052
0,55	1,230	2,915	0,5063
0,56	1,278	2,432	0,5073
0,57	1,318	2,087	0,5082
0,58	1,352	1,829	0,5090
0,59	1,381	1,628	0,5098
0,60	1,406	1,467	0,5105
0,61	1,429	1,336	0,5112
0,62	1,448	1,226	0,5118
0,63	1,465	1,134	0,5124
0,64	1,481	1,054	0,5129
0,65	1,494	0,9856	0,5133
0,66	1,506	0,9255	0,5137
0,67	1,517	0,8725	0,5141
0,68	1,526	0,8253	0,5144
0,69	1,534	0,7832	0,5147
0,70	1,542	0,7453	0,5150
0,71	1,548	0,7109	0,5153
0,72	1,554	0,6797	0,5155
0,73	1,558	0,6512	0,5157
0,74	1,563	0,6250	0,5158
0,75	1,566	0,6010	0,5160
0,76	1,569	0,5787	0,5161
0,77	1,572	0,5581	0,5162
0,78	1,574	0,5390	0,5163
0,79	1,576	0,5212	0,5163
0,80	1,577	0,5046	0,5164
0,81	1,579	0,4890	0,5164
0,82	1,579	0,4744	0,5165
0,83	1,580	0,4606	0,5165
0,84	1,580	0,4477	0,5165
0,85	1,580	0,4355	0,5165
0,86	1,580	0,4239	0,5165
0,87	1,579	0,4130	0,5165
0,88	1,579	0,4026	0,5164
0,89	1,578	0,3928	0,5164
0,90	1,577	0,3834	0,5164
0,91	1,576	0,3745	0,5163
0,92	1,575	0,3660	0,5163
0,93	1,573	0,3579	0,5162
0,94	1,572	0,3502	0,5162
0,95	1,570	0,3428	0,5161
0,96	1,569	0,3357	0,5160
0,97	1,567	0,3288	0,5160
0,98	1,565	0,3223	0,5159
0,99	1,563	0,3161	0,5168
1,00	1,561	0,3101	0,5158

$k^2 = 0,14$

ν	r	λ	$\frac{s}{L}$
0,50		pas de racine	
0,51	0,8300	14,68	0,5013
0,52	0,9807	7,342	0,5026
0,53	1,078	4,896	0,5037
0,54	1,151	3,674	0,5048
0,55	1,208	2,941	0,5058
0,56	1,256	2,453	0,5068
0,57	1,295	2,104	0,5077
0,58	1,330	1,843	0,5085
0,59	1,359	1,640	0,5092
0,60	1,385	1,477	0,5099
0,61	1,407	1,345	0,5106
0,62	1,427	1,234	0,5112
0,63	1,445	1,141	0,5117
0,64	1,461	1,061	0,5122
0,65	1,475	0,9912	0,5127
0,66	1,487	0,9306	0,5131
0,67	1,498	0,8771	0,5135
0,68	1,508	0,8295	0,5138
0,69	1,517	0,7869	0,5141
0,70	1,524	0,7487	0,5144
0,71	1,531	0,7140	0,5146
0,72	1,537	0,6825	0,5149
0,73	1,543	0,6538	0,5151
0,74	1,547	0,6274	0,5152
0,75	1,551	0,6032	0,5154
0,76	1,555	0,5808	0,5155
0,77	1,558	0,5600	0,5156
0,78	1,561	0,5408	0,5157
0,79	1,563	0,5228	0,5158
0,80	1,565	0,5061	0,5159
0,81	1,566	0,4904	0,5159
0,82	1,567	0,4757	0,5160
0,83	1,568	0,4618	0,5160
0,84	1,569	0,4488	0,5160
0,85	1,569	0,4365	0,5160
0,86	1,569	0,4249	0,5161
0,87	1,569	0,4139	0,5161
0,88	1,568	0,4035	0,5160
0,89	1,568	0,3936	0,5160
0,90	1,567	0,3842	0,5160
0,91	1,566	0,3752	0,5160
0,92	1,565	0,3667	0,5159
0,93	1,564	0,3585	0,5159
0,94	1,563	0,3507	0,5158
0,95	1,562	0,3433	0,5158
0,96	1,560	0,3362	0,5157
0,97	1,559	0,3293	0,5157
0,98	1,557	0,3228	0,5156
0,99	1,555	0,3165	0,5155
1,00	1,554	0,3105	0,5155

$k^2 = 0,15$

ν	r	λ	$\frac{s}{L}$
0,50	pas de racine		
0,51	0,8144	14,81	0,5012
0,52	0,9628	7,405	0,5024
0,53	1,059	4,937	0,5035
0,54	1,131	3,703	0,5045
0,55	1,188	2,964	0,5054
0,56	1,235	2,471	0,5063
0,57	1,275	2,119	0,5072
0,58	1,309	1,856	0,5080
0,59	1,339	1,651	0,5087
0,60	1,365	1,487	0,5094
0,61	1,388	1,353	0,5100
0,62	1,408	1,242	0,5106
0,63	1,426	1,147	0,5111
0,64	1,442	1,066	0,5116
0,65	1,456	0,9965	0,5121
0,66	1,469	0,9353	0,5125
0,67	1,481	0,8813	0,5129
0,68	1,491	0,8333	0,5132
0,69	1,500	0,7904	0,5135
0,70	1,508	0,7518	0,5138
0,71	1,516	0,7169	0,5141
0,72	1,522	0,6852	0,5143
0,73	1,528	0,6562	0,5145
0,74	1,535	0,6297	0,5147
0,75	1,537	0,6052	0,5149
0,76	1,541	0,5827	0,5150
0,77	1,547	0,5618	0,5151
0,78	1,548	0,5424	0,5152
0,79	1,550	0,5243	0,5153
0,80	1,552	0,5075	0,5154
0,81	1,554	0,4917	0,5155
0,82	1,555	0,4769	0,5155
0,83	1,557	0,4630	0,5156
0,84	1,557	0,4499	0,5156
0,85	1,558	0,4375	0,5156
0,86	1,558	0,4258	0,5157
0,87	1,559	0,4148	0,5157
0,88	1,558	0,4043	0,5157
0,89	1,558	0,3943	0,5156
0,90	1,558	0,3849	0,5156
0,91	1,557	0,3759	0,5156
0,92	1,556	0,3673	0,5156
0,93	1,556	0,3591	0,5155
0,94	1,555	0,3513	0,5155
0,95	1,553	0,3438	0,5155
0,96	1,552	0,3367	0,5154
0,97	1,551	0,3298	0,5154
0,98	1,550	0,3232	0,5153
0,99	1,548	0,3169	0,5153
1,00	1,546	0,3109	0,5152

$k^2 = 0,16$

ν	r	λ	$\frac{s}{L}$
0,50	pas de racine		
0,51	0,8001	14,92	0,5011
0,52	0,9464	7,460	0,5022
0,53	1,041	4,973	0,5032
0,54	1,112	3,730	0,5042
0,55	1,169	2,984	0,5051
0,56	1,216	2,487	0,5060
0,57	1,256	2,133	0,5068
0,58	1,290	1,867	0,5075
0,59	1,320	1,661	0,5082
0,60	1,346	1,496	0,5089
0,61	1,369	1,361	0,5095
0,62	1,390	1,248	0,5101
0,63	1,408	1,153	0,5106
0,64	1,425	1,072	0,5111
0,65	1,439	1,001	0,5115
0,66	1,452	0,9396	0,5119
0,67	1,464	0,8852	0,5123
0,68	1,475	0,8369	0,5127
0,69	1,484	0,7937	0,5130
0,70	1,493	0,7548	0,5133
0,71	1,500	0,7196	0,5135
0,72	1,507	0,6877	0,5138
0,73	1,513	0,6585	0,5140
0,74	1,519	0,6318	0,5142
0,75	1,524	0,6072	0,5144
0,76	1,528	0,5845	0,5145
0,77	1,532	0,5635	0,5146
0,78	1,535	0,5439	0,5148
0,79	1,538	0,5258	0,5149
0,80	1,540	0,5088	0,5150
0,81	1,542	0,4929	0,5150
0,82	1,544	0,4780	0,5151
0,83	1,546	0,4640	0,5152
0,84	1,547	0,4509	0,5152
0,85	1,548	0,4384	0,5152
0,86	1,548	0,4267	0,5153
0,87	1,549	0,4156	0,5153
0,88	1,549	0,4051	0,5153
0,89	1,549	0,3951	0,5153
0,90	1,549	0,3856	0,5153
0,91	1,548	0,3765	0,5153
0,92	1,548	0,3679	0,5152
0,93	1,547	0,3597	0,5152
0,94	1,546	0,3518	0,5152
0,95	1,545	0,3443	0,5152
0,96	1,544	0,3372	0,5151
0,97	1,543	0,3303	0,5151
0,98	1,542	0,3237	0,5150
0,99	1,541	0,3173	0,5150
1,00	1,539	0,3112	0,5149

$k^2 = 0,17$

ν	r	λ	$\frac{s}{L}$
0,50	pas de racine		
0,51	0,7871	15,02	0,5011
0,52	0,9313	7,509	0,5021
0,53	1,025	5,005	0,5030
0,54	1,096	3,753	0,5040
0,55	1,152	3,002	0,5048
0,56	1,199	2,502	0,5056
0,57	1,238	2,145	0,5064
0,58	1,272	1,878	0,5071
0,59	1,302	1,670	0,5078
0,60	1,329	1,503	0,5084
0,61	1,352	1,368	0,5090
0,62	1,373	1,254	0,5096
0,63	1,391	1,159	0,5101
0,64	1,408	1,077	0,5106
0,65	1,423	1,006	0,5110
0,66	1,436	0,9436	0,5114
0,67	1,449	0,8888	0,5118
0,68	1,459	0,8402	0,5122
0,69	1,469	0,7967	0,5125
0,70	1,478	0,7576	0,5128
0,71	1,486	0,7222	0,5130
0,72	1,493	0,6900	0,5133
0,73	1,500	0,6607	0,5165
0,74	1,506	0,6338	0,5137
0,75	1,511	0,6090	0,5139
0,76	1,515	0,5862	0,5141
0,77	1,519	0,5650	0,5142
0,78	1,523	0,5454	0,5143
0,79	1,526	0,5271	0,5144
0,80	1,529	0,5101	0,5145
0,81	1,531	0,4941	0,5146
0,82	1,533	0,4791	0,5147
0,83	1,535	0,4651	0,5148
0,84	1,536	0,4518	0,5148
0,85	1,537	0,4393	0,5149
0,86	1,538	0,4275	0,5149
0,87	1,539	0,4164	0,5149
0,88	1,539	0,4058	0,5149
0,89	1,540	0,3958	0,5149
0,90	1,540	0,3862	0,5149
0,91	1,540	0,3771	0,5149
0,92	1,539	0,3685	0,5149
0,93	1,539	0,3602	0,5149
0,94	1,538	0,3524	0,5149
0,95	1,538	0,3448	0,5149
0,96	1,537	0,3376	0,5148
0,97	1,536	0,3307	0,5148
0,98	1,535	0,3241	0,5148
0,99	1,534	0,3177	0,5147
1,00	1,532	0,3116	0,5147

$k^2 = 0,18$

ν	r	λ	$\frac{s}{L}$
0,50	pas de racine		
0,51	0,7750	15,11	0,5010
0,52	0,9173	7,553	0,5020
0,53	1,010	5,033	0,5029
0,54	1,080	3,774	0,5037
0,55	1,136	3,019	0,5046
0,56	1,182	2,516	0,5053
0,57	1,222	2,156	0,5061
0,58	1,256	1,887	0,5068
0,59	1,286	1,678	0,5074
0,60	1,312	1,511	0,5080
0,61	1,336	1,374	0,5086
0,62	1,367	1,260	0,5092
0,63	1,375	1,164	0,5097
0,64	1,390	1,081	0,5101
0,65	1,407	1,010	0,5106
0,66	1,421	0,9473	0,5110
0,67	1,434	0,8922	0,5114
0,68	1,445	0,8433	0,5117
0,69	1,455	0,7995	0,5120
0,70	1,464	0,7601	0,5123
0,71	1,472	0,7245	0,5126
0,72	1,480	0,6922	0,5128
0,73	1,487	0,6627	0,5131
0,74	1,493	0,6356	0,5133
0,75	1,498	0,6107	0,5135
0,76	1,503	0,5878	0,5136
0,77	1,507	0,5665	0,5138
0,78	1,511	0,5468	0,5139
0,79	1,515	0,5284	0,5140
0,80	1,518	0,5113	0,5141
0,81	1,520	0,4952	0,5142
0,82	1,523	0,4802	0,5143
0,83	1,525	0,4660	0,5144
0,84	1,526	0,4527	0,5145
0,85	1,528	0,4402	0,5145
0,86	1,529	0,4284	0,5145
0,87	1,530	0,4171	0,5146
0,88	1,530	0,4065	0,5146
0,89	1,531	0,3964	0,5146
0,90	1,531	0,3869	0,5146
0,91	1,531	0,3777	0,5146
0,92	1,531	0,3691	0,5146
0,93	1,531	0,3608	0,5146
0,94	1,530	0,3529	0,5146
0,95	1,530	0,3453	0,5146
0,96	1,529	0,3381	0,5146
0,97	1,528	0,3311	0,5145
0,98	1,528	0,3245	0,5145
0,99	1,527	0,3181	0,5145
1,00	1,526	0,3120	0,5144

$k^2 = 0,19$

$\sqrt{}$	r	λ	$\frac{s}{L}$
0,50	pas de racine		
0,51	0,7638	15,19	0,5009
0,52	0,9043	7,592	0,5018
0,53	0,9961	5,059	0,5027
0,54	1,065	3,793	0,5035
0,55	1,121	3,034	0,5043
0,56	1,167	2,528	0,5051
0,57	1,206	2,167	0,5058
0,58	1,240	1,896	0,5064
0,59	1,270	1,685	0,5071
0,60	1,297	1,517	0,5077
0,61	1,320	1,380	0,5082
0,62	1,341	1,265	0,5088
0,63	1,360	1,168	0,5093
0,64	1,377	1,085	0,5097
0,65	1,393	1,013	0,5102
0,66	1,407	0,9507	0,5106
0,67	1,419	0,8953	0,5109
0,68	1,431	0,8461	0,5113
0,69	1,441	0,8021	0,5116
0,70	1,451	0,7625	0,5119
0,71	1,459	0,7268	0,5122
0,72	1,467	0,6942	0,5124
0,73	1,474	0,6646	0,5126
0,74	1,480	0,6374	0,5129
0,75	1,486	0,6124	0,5130
0,76	1,491	0,5893	0,5132
0,77	1,496	0,5679	0,5134
0,78	1,500	0,5481	0,5135
0,79	1,504	0,5296	0,5136
0,80	1,507	0,5124	0,5138
0,81	1,510	0,4963	0,5139
0,82	1,512	0,4812	0,5140
0,83	1,515	0,4670	0,5140
0,84	1,516	0,4536	0,5141
0,85	1,518	0,4410	0,5142
0,86	1,519	0,4291	0,5142
0,87	1,521	0,4179	0,5142
0,88	1,521	0,4072	0,5143
0,89	1,522	0,3971	0,5143
0,90	1,523	0,3875	0,5143
0,91	1,523	0,3783	0,5143
0,92	1,523	0,3696	0,5143
0,93	1,523	0,3613	0,5143
0,94	1,523	0,3533	0,5143
0,95	1,522	0,3457	0,5143
0,96	1,522	0,3385	0,5143
0,97	1,521	0,3315	0,5143
0,98	1,521	0,3249	0,5142
0,99	1,520	0,3185	0,5142
1,00	1,519	0,3123	0,5142

DEUXIEME THESE

Proposition donnée par la Faculté :

EXPOSE DES CONNAISSANCES ACTUELLES CONCERNANT L'INFLUENCE DES DISLOCATIONS SUR LES PROPRIETES MECANIQUES DES METAUX.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Besançon

H. GAUTHIER

Vu et approuvé :

Le Doyen de la Faculté des Sciences

R. JACQUEMAIN

Besançon, le Juin 1964